KAPITEL 2

2.1

a)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

u = inflöde

y = massan bakterier

Bestäm överföringsfunktionen $u \to y$ och en diff.ekvation.

Enligt FS ges överföringsfunktionen $G(s)$ av:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{(s-10)(s+1)+1}}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-10)(s+1)+1} U(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - 9s\, Y(s) - 9\, Y(s) = U(s)$$

Mha invers laplace får vi:

$$\boxed{\ddot{y} - 9\dot{y} - 9y = u}$$

b) $$\boxed{J \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + D \frac{dy}{dt} = u}$$

y = vinkel mot jorden

u = vridmoment

Bestäm $G(s)$ och diff.ekv.

$$J \cdot \ddot{y} + D\dot{y} = u$$

Laplace

$$Js^2 Y + DsY = U$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{Js^2 + Ds} U \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{Js^2 + Ds}}$$

Vi skriver systemet på tillståndsform

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{J}(-D\dot{y} + u) = \frac{1}{J}(Dx_2 + u)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}}$$

c) $$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}u \\ y &= x \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Bestäm } G(s)}$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 1\left(s - -\frac{1}{k}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{1+sk}}$$

d) $$\boxed{G(s) = \frac{Y}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s}}$$

$\boxed{\text{Skriv systemet på tillståndsform.}}$

FS: $$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}}$$

Observerbar Kanonisk form!

2.2 Bestäm G(s) och diffekvation

a)
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x + 2u \end{aligned}}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 =$$

$$= \boxed{\frac{2s^2 + 7s + 1}{s^2 + 5s + 6}}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow Y(s)(s^2 + 5s + 6) = (2s^2 + 7s + 1)U(s)$$

Inv. laplace $\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2\ddot{u} + 7\dot{u} + u}$

b)
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -15 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= \boxed{\frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}}$$

Diff. ekv: $Y = G \cdot U \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + 3u}$

$\boxed{2.5}$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}}$$

a) Beräkna poler & nollställen, är systemet stabilt?

$1 \neq 0 \Rightarrow$ Inga nollställen.

$s^2 + 4s + 3 = 0 \Leftrightarrow s = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$

$\Rightarrow$ Poler: $s = -3$ och $s = -1$

$\deg(1) < \deg(s^2+4s+3)$ och båda polerna ligger i vänster planhalva.

$\Rightarrow$ Systemet är stabilt.

b) Vad är systemets statiska förstärkning?

$$G(0) = \frac{1}{0 + 0 + 3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

c) Beräkna start- och slutvärde för systemets stegsvar.

Vid ett stegsvar är insignalen $u(t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$

Eftersom systemet är stabilt kan vi använda begynnelse- och slutvärdesteoremet.

Begynnelsevärdesteoremet

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = s \cdot \frac{1}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s} \Big|_{s \to \infty} = \boxed{0}$$

Slutvärdesteoremet

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

d) Beräkna start- och slutvärde för systemets impulssvar.

$$u(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \boxed{0}$$

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to \infty} s\, Y(s) = \boxed{0}$$

e) Beräkna begynnelsederivatan av systemets stegsvar.

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+4s+3}$$

Vi vet att $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)$

Om vi kallar derivatan av stegsvaret för $z(t)$ får vi

$$Z(s) = s \cdot Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

vilket är samma som impulssvaret.

$$\left(\frac{d}{dt}(\theta(t)) = \delta(t) \right)$$

$$\lim_{t \to 0} z(t) = \lim_{s \to \infty} s Z(s) = \boxed{0}$$

2.6

$$G(s) = \frac{0.25}{s^2 + 0.6s + 0.25}$$

a) Beräkna nollställen och poler.

$0{,}25 \neq 0 \Rightarrow$ Inga nollställen.

poler

$$s^2 + 0.6s + 0.25 = 0 \Leftrightarrow s = -0.3 \pm \sqrt{0{,}09 - 0.25} = -0.3 \pm 0.4i$$

b) Beräkna systemets statiska förstärkning.

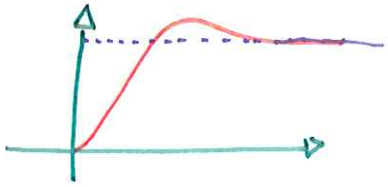
$$G(0) = \frac{0.25}{0.25} = 1$$

c) Beräkna och skissa systemets stegsvar.

$$u(t) = \theta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{0.25}{s^2 + 0.6s + 0.25} \cdot \frac{1}{s} = \frac{w^2}{s(s^2 + 2\xi w s + w^2)}$$

där $w = 0.5$ och $\xi = 0.6$



$$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}(28)} 1 - 1.25e^{-0.3t} \cdot \sin(0.4t + 0.9273)$$

2.9 Betrakta systemet

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

a) Är systemet asymptotiskt stabilt?

Alla egenvärden till A måste ligga i vänster halvplan

$\Rightarrow Re(\lambda_i) < 0$ för $\forall i$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$$

$\Rightarrow$ Systemet är ej asymtotiskt stabilt!

b) Är systemet stabilt?

Systemet är stabilt eftersom det endast finns enkla egenvärden på den imaginära axeln.

2.11 Avgör vilka överföringsfunktioner som hör ihop med något av stegsvaren A–E.

$\boxed{G_3 = E}$ eftersom G_3 är den enda med negativa koefficienter ~~[illegible]~~ i nämnaren.

$\Rightarrow G_3$ är inte stabil.

$\boxed{G_7 = C}$ eftersom G_3, G_4 och G_7 (andragradens) har förstärkning $G_i(0) = 1$. $G_7(0) \approx 2/3$.

$\boxed{G_5 = D}$ eftersom D har en derivata skild från noll för lågat.
Vi behöver en tidskonstant T som ungefär är ett (exakt) för att komma upp till- ~~[illegible] på en~~ räckligt fort.

$\boxed{\begin{array}{l} G_2 = A \\ G_6 = B \end{array}}$ eftersom dämpningen är mindre i G_6 än i G_2.

2.12 Para ihop vart och ett av de fyra pol-nollställediagram med något av stegsvaren A-G.

1 = D

poler i $-\frac{1}{4} \pm i$

nollst. i -1

$$\Rightarrow G(s) = K \frac{s+1}{(s+\frac{1}{4}+i)(s+\frac{1}{4}-i)} \approx K \frac{s+1}{s^2+\frac{1}{2}s+1}.$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} G = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} G \cdot s = K \neq 0$$

$$y(\infty) = G(0) = K \neq 0$$

$$T = 2\pi/1 \approx 6 \Rightarrow D$$

2 = F

$$G = K \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = K \neq 0$, $y(\infty) = -\frac{K}{2} \neq 0$

Begynnelsevärdesderivatan och slutvärdet har olika tecken.

3 = G

$$G = K \frac{s}{(s+\frac{1}{4})^2+1}$$

$y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = K \neq 0$, $y(\infty) = 0$

$\boxed{4 = C}$

$$\boxed{G = K\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}}$$

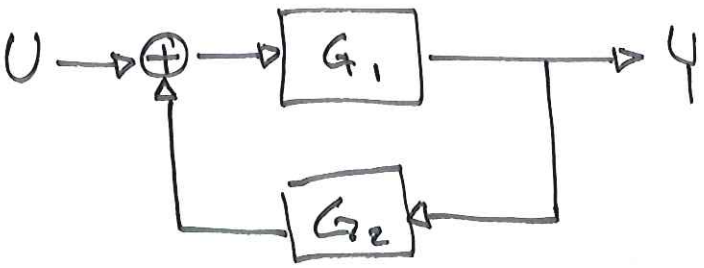
$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = K \neq 0, \quad y(\infty) = \frac{3K}{2} \neq 0$$

samma tecken i derivatan och slutvärdet!

Icke svängande system = inga komplexa poler.

2.14 Bestäm $G(s)$

a)



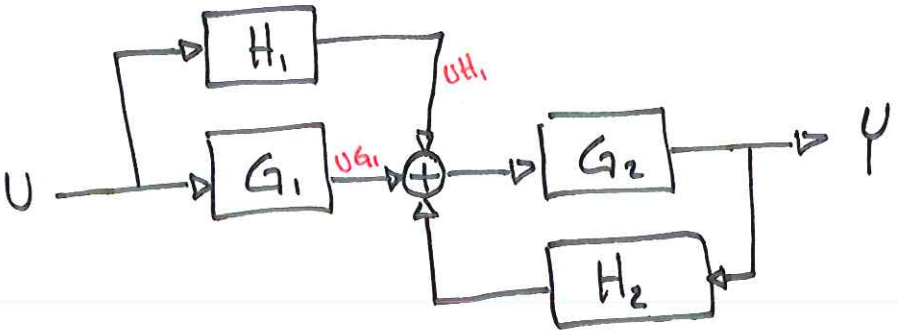
$$Y = G_1(G_2 Y + U) =$$

$$= G_1 G_2 Y + G_1 U$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2} \cdot U \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2}}$$

---

b)

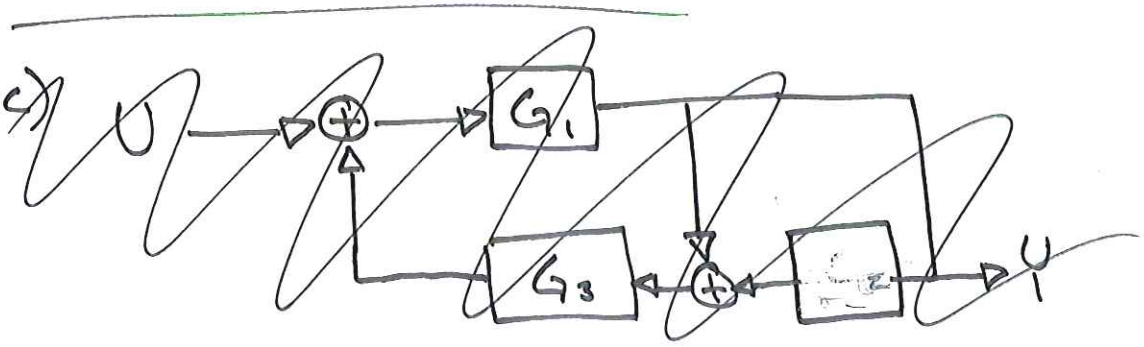


$$Y = G_2(U(H_1 + G_1) + Y H_2)$$

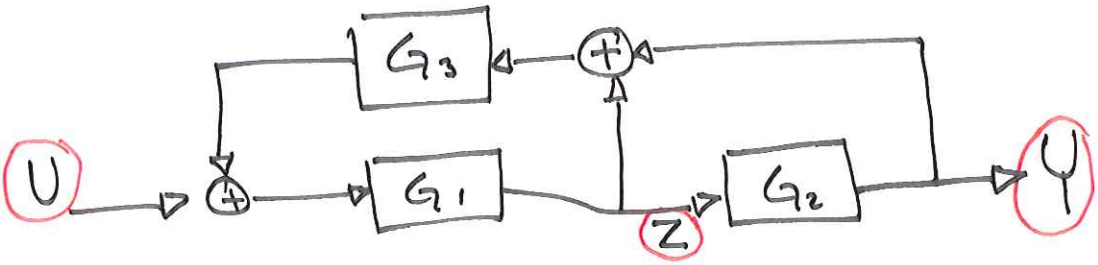
$$\Leftrightarrow Y = \boxed{\frac{G_2 H_1 + G_2 G_1}{1 - G_2 H_2}} U$$

---

c)



c)



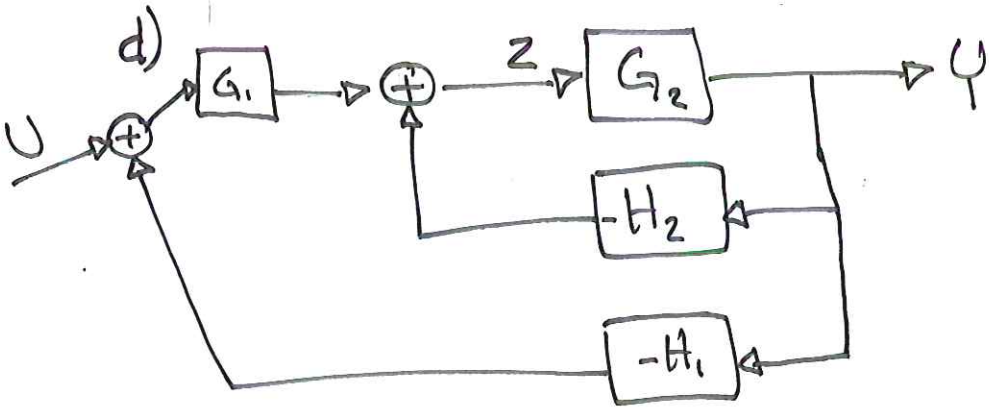
$$Y = G_2 Z$$

$$Z = G_1 (U + G_3 Z + G_2 G_3 Z)$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{G_1}{1 - G_1 G_3 - G_1 G_2 G_3} \cdot U$$

$$\Rightarrow Y = \boxed{\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_3 - G_1 G_2 G_3}} \cdot U$$

d)

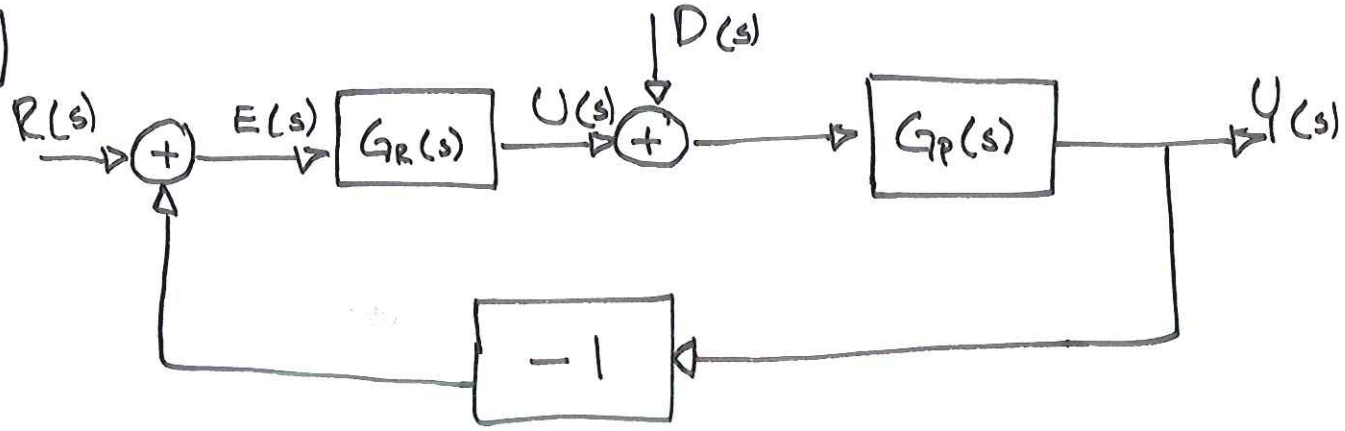


$$Y = G_2 Z$$

$$Z = (U + Z G_2 (-H_1)) G_1 + Z G_2 (-H_2) \Rightarrow Z = \frac{G_1}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1} U$$

$$\Rightarrow Y = \boxed{\frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}} U$$

$\boxed{2.15}$



a) $\boxed{R(s) \longrightarrow Y(s)}$

$$Y = ((R - Y)\,G_R + D)\,G_P$$

$$\Longleftrightarrow Y = \cancel{\ldots} = R\,G_R G_P + D\,G_P + (-Y)\,G_R G_P$$

$$\Longleftrightarrow Y\,(1 + G_R G_P) = (R\,G_R + D)\,G_P$$

$$\Longleftrightarrow Y = \boxed{\frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P}} \cdot R + \boxed{\frac{1}{1 + G_R G_P}} \cdot D$$

b) $\boxed{D \longrightarrow Y}$

c) $\boxed{R \longrightarrow E}$

$$E = R + (E\,G_R + D)\,G_P\,(-1)$$

$$\Longleftrightarrow E = \boxed{\frac{1}{1 + G_P G_R}}\,R - \frac{G_P}{1 + G_P G_R}\,D$$

d) $\boxed{D \rightarrow U}$

$$U = \left((U + D) G_P (-1) + R \right) G_R$$

$$\Leftrightarrow U = -U G_P G_R - D G_P G_R + R G_R$$

$$\Leftrightarrow U (1 + G_P G_R) = -G_P G_R D + R G_R$$

$$\Leftrightarrow U = \boxed{-\frac{G_R G_P}{1 + G_P G_R}} \cdot D + \frac{G_R}{1 + G_P G_R}$$

$\boxed{2.16}$

$$\boxed{G(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} + 1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1 = 1,\ b_2 = 1, \\ a_1 = 5,\ a_2 = 6 \\ d = 1 \end{array}}$$

c) <u>Observerbar kanonisk form</u>

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u} \qquad \boxed{y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + [1] u}$$

b) <u>Styrbar kanonisk form</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + [1] u \end{array}}$$

<u>Diagonalform</u>

a) $G(s) = \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3} + 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix} x + [1] u \end{array}}$$