KAPITEL 1

1.1

a) Ange i matrisform strömmarna $\bar{i} = (I_1, I_2, I_3)$ som funktioner av spänningarna $\bar{v} = (V_1, V_2)$.

fall	V_1	V_2	I_1	I_2	I_3
1	1	2	8	7	-3
2	2	1	7	-1	6
3			10	23	-9
4			15	5	-3

$\bar{i} = A \cdot \bar{v}$ (Linjärt samband)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 V_1 + a_2 V_2 = I_1 \\ b_1 V_1 + b_2 V_2 = I_2 \\ c_1 V_1 + c_2 V_2 = I_3 \end{cases}$$

Sambandet + de två fallen ger sex ekvationer:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 = 8 \\ a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 1 = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 = -3 \\ c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 = 7 \\ b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

SEX EKVATIONER
SEX OBEKANTA Ü

Genom lite gaussning får man:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2V_1 + 3V_2 \\ I_2 = -3V_1 + 5V_2 \\ I_3 = V_1 - 2V_2 \end{cases}$$

b) FALL 3

$$\begin{cases} 10 = 2V_1 + 3V_2 \\ 23 = -3V_1 + 5V_2 \\ -9 = V_1 - 2V_2 \end{cases} \Rightarrow 76 = 19V_2 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = 4} \Rightarrow \boxed{V_1 = -1}$$

(insättningstest är ok)

FALL 4

$$\begin{cases} 15 = 2V_1 + 3V_2 \\ 5 = -3V_1 + 5V_2 \\ -3 = V_1 - 2V_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 2V_1 + 3V_2 \\ 55 = 0 + 19V_2 \\ -21 = 0 - 7V_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 2V_1 + 3V_2 \\ V_2 = \frac{55}{19} \\ V_2 = 3 \end{cases} \updownarrow \text{Motsägelse!}$$

SVAR: FALL 3: $V_1 = -1$, $V_2 = 4$

FALL 4: omöjligt!

1.2

A	B	C	D	E
1	1	5	13	5
3	2	13	33	11

a) **Bestäm avbildningsmatrisen**

$\bar{Y} = A\bar{X}$ Samma metod som 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 X_A + a_2 X_B = Y_C \\ b_1 X_A + b_2 X_B = Y_D \\ c_1 X_A + c_2 X_B = Y_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 5 \\ a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 = 13 \\ b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 2 = 33 \end{cases} \quad * \quad \begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 5 \\ c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 2 = 11 \end{cases}$$

Gaussning av (*) ger:

SVAR

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\bar{y} = A\bar{x} \iff \begin{cases} 3x_A + 2x_B = y_C \\ 7x_A + 6x_B = y_D \\ 1 \cdot x_A + 4x_B = y_E \end{cases}$$

Enhetslast i A: $x_A = 1, x_B = 0$

$$\Rightarrow \bar{y} = (y_C, y_D, y_E) = (3, 7, 1)$$ SVAR

Enhetslast i B: $x_A = 0, x_B = 1$

$$\Rightarrow \bar{y} = (y_C, y_D, y_E) = (2, 6, 4)$$ SVAR

c)

40	30	180	470	160

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 40 + 2 \cdot 30 = 180 & \text{JA} \\ 7 \cdot 40 + 6 \cdot 30 \neq 470 & \text{NEJ} \\ 1 \cdot 40 + 4 \cdot 30 = 160 & \text{JA} \end{cases}$$

SVAR: Nej, linearitet ger

$$\bar{y} = (180, 460, 160)$$

1.3

Strömstyrka : I
Spänning : V
längd : ℓ
radie : r

$$I = kV \quad , I = \frac{k_2}{\ell} \quad , I = k_3 \pi r^2$$

Uttryck i som en funktion av V, ℓ, r

SVAR

$$I = k_4 \cdot V \cdot \ell^{-1} \cdot r^2$$

1.4

$A \xrightarrow{k} B$ (k är samolikheten)

sönderfall $= kx \Delta t$

$\Delta x \approx -kx\Delta t$ (minus då x minskar)

SVAR

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -kx$$

1.5

$$A_1 \xrightarrow{k_1} A_2 \xrightarrow{k_2} A_3 \xrightarrow{k_3} \dots \xrightarrow{k_{n-1}} A_n$$

Skriv ett system av differentialekvationer för kvantiteterna $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ändring = nybildning − sönderfall

P.ss. som 1.4:

$$\Delta x_2 = k_1 x_1 \Delta t - k_2 x_2 \Delta t$$

SVAR

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = k_2 x_2 - k_3 x_3 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = k_{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

I sista steget kan inget sönderfalla till nästa tillstånd!

1.6

1. Planeten rör sig i (x_1, x_2) – planet
2. massa × accelerationen = kraft
3. acceleration $a = \frac{dv}{dt}$
4. hastighet $v = \frac{dx}{dt}$

Skriv upp tillståndsekvationer för planetens rörelse

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad , \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad , \quad \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}$$

1.7 Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = e^{t^2}, & t > 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Integrerande faktor: $e^{\ln t}$

$$\frac{dx}{dt}e^{\ln t} + \frac{1}{t}e^{\ln t}x = e^{\ln t}\cdot e^{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt}t + x = te^{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(xt) = te^{t^2}$$

$$\Leftrightarrow xt = \int te^{t^2}dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2t}e^{t^2} + \frac{C}{t}}$$

Begynnelsevillkor

$$1 = \frac{1}{2}e^1 + \frac{C}{1} \Rightarrow C = \left(1 - \frac{1}{2}e\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = \frac{1}{2t}e^{t^2} + \frac{\left(1 - \frac{e}{2}\right)}{t}}$$

1.8 Lös

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x = f(t) \quad , t > 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Integrerande faktor: e^{2t}

$$\frac{dx}{dt} e^{2t} + 2 \cdot e^{2t} \cdot x = f(t) \cdot e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{2t} \cdot x\right) = f(t) \cdot e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{2t} \cdot x\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(t) \cdot e^{2\tau} \, d\tau$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} x(t) - e^{2t_0} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{2\tau} \, d\tau$$

SVAR

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = e^{-2t} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau) \cdot e^{2\tau} \, d\tau}$$

1.9

a) $\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \iff \frac{dx}{dt} = -2x$

Gymnasiekunskaper:

$$x = C \cdot e^{-2t}$$

b) $\frac{dx}{dt} + 2x = 1$

Integrerande faktor:

$$\frac{dx}{dt} \cdot e^{2t} + 2 \cdot e^{2t} \cdot x = e^{2t}$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(e^{2t} \cdot x(t)\right) = e^{2t}$$

$$\iff e^{2t} \cdot x(t) = \frac{1}{2} e^{2t} + C$$

$$\iff x(t) = \frac{1}{2} + C e^{-2t}$$

Alternativ lösning

Partikulärlösning gissas enkelt $x_p(t) = \frac{1}{2}$

Homogen lösning är samma som i a).

$$\Rightarrow x(t) = x^p + x^h = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2t}$$

c)

i) $x(t) = 0 \quad , \quad t < 0$

ii) $\frac{dx}{dt} + 2x = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < 0 \text{ och } t > 1 \end{cases}$

Passningsmetoden

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{2} + C_1 e^{-2t} & , 0 < t < 1 \\ C_2 e^{-2t} & , t > 1 \end{cases}$$

Vid $t = 0$

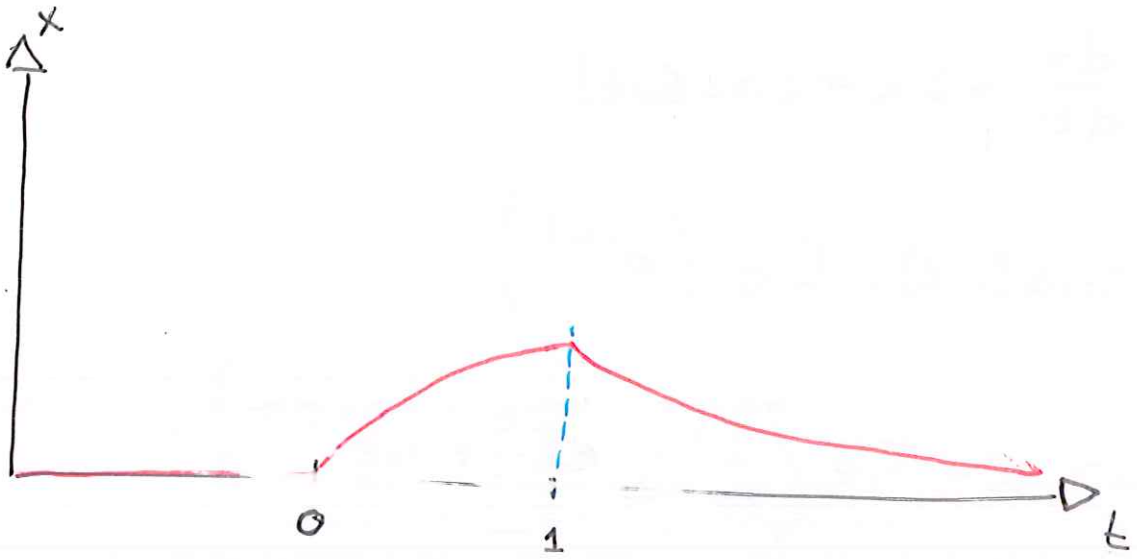
$$0 = \frac{1}{2} + C_1 e^0 \iff C_1 = -\frac{1}{2}$$

Vid $t = 1$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} = C_2 e^{-2} \iff C_2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & , \quad 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1) e^{-2t} & , \quad t > 1 \end{cases}$$

d)



1.10 Finn den allmänna lösningen till:

a) $\frac{dx}{dt} + 2x = e^{at}$, $a \neq -2$

Integrerande faktor: e^{2t}

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} \cdot e^{2t} + 2 \cdot e^{2t} \cdot x = e^{t(a+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{2t} \cdot x\right) = e^{t(a+2)}$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} \cdot x = \frac{e^{t(a+2)}}{a+2} + C$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{a+2} e^{at} + Ce^{-2t}}$$

b)

$$\frac{dx}{dt} + 2x = \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$a = i\omega \Rightarrow x = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i\omega + 2} e^{i\omega t} + Ce^{-2t}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\omega^2+4}\left(2\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right) + Ce^{-2t}}$$

1.11 Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x = \cos \omega t \;, & t < 0 \\ x(t) = 0 \;, & t \leq 0 \end{cases}$$

Allmänn lösning från 1.10:

$$x = \frac{1}{\omega^2+4}\left(2\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right) + Ce^{-2t} \;, \quad t < 0$$

* Vid $t = 0$

$$0 = \frac{1}{\omega^2+4}(2 + 0) + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{2}{\omega^2+4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\omega^2+4}\left(2\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right) - \frac{2}{\omega^2+4} e^{-2t}, & t > 0 \end{cases}}$$

1.12 Bestäm den allmänna lösningen till:

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$

Kar. pol. $p(r) = r^2 + 2r = 0 \iff r_1 = 0,\ r_2 = -2$

$\Rightarrow x(t) = x^h(t) = C_1 e^0 + C_2 e^{-2t} = C_1 + C_2 e^{-2t}$

b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$

$p(r) = r^2 + 4r + 3 = 0 \iff r = -2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$\Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -3$

$x(t) = x^h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$

$p(r) = r^2 + 2r + 1 = 0 \iff r = -1 \pm \sqrt{1 - 1} = -1$

$\Rightarrow x(t) = x^h(t) = (C + Dt)e^{-t}$

d) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$

$\Rightarrow p(r) = r^2 + 2r + 2 = 0 \iff r = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$

$x(t) = x^h(t) = C_1 e^{(-1-i)t} + C_2 e^{(-1+i)t} = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$