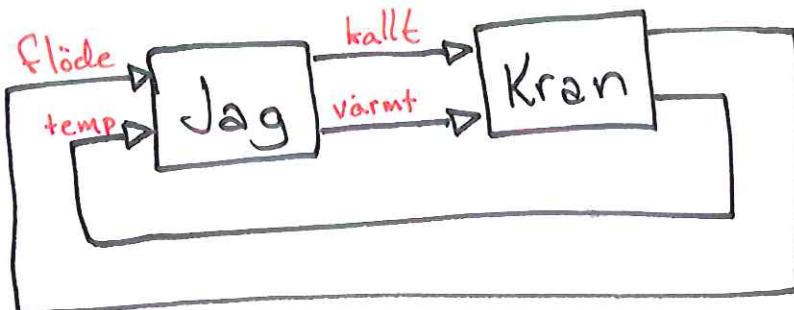


KAPITEL 1

1.1 a) Beskriv duschning mha ett blockschema.

- När jag duschar känner jag av temp. & flöde (mätsignaler).
- Jag reglerar flödet av kallt resp. varmt vatten.
- Kranen har nu ett nytt flöde & temp.

Blockschema



Variationer i vattentillgång & kan utgöra störningar. (Om vattnet tar slut fungerar inte mitt system).

b) Jag kör bil

och riktningen

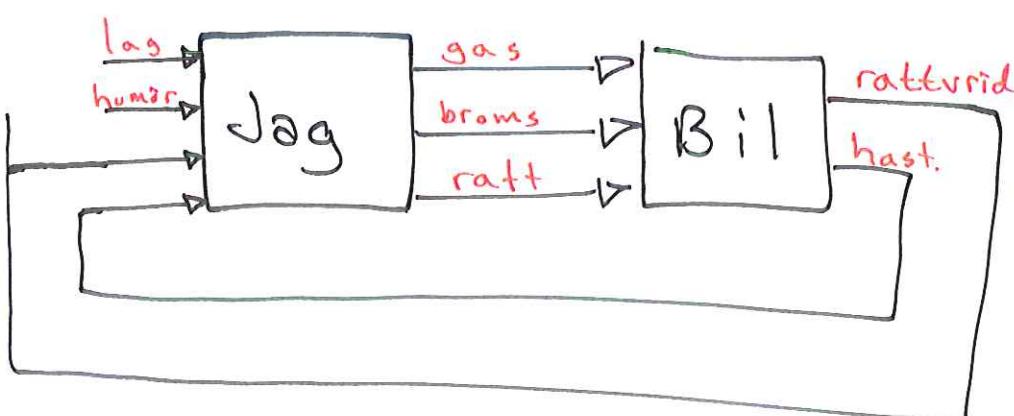
- Det är hastigheten ^{och riktningen} vi vill styra.

- Vilken hastighet vi vill ha beror på:

- Lagen
- Väderet
- humöret
- bråttom
- .
- :
- osv
- :

vi ändrar hastigheten mha gas & broms och riktn. med ratt.
Hur mycket vi vill gasa/bromsa/rattra beror på den ursprungliga hastigheten och ~~och~~ ratturridningen.

Blockschema



L.2

Vi undersöker hur bilen påverkas av gaspedalen

gaspedalens läge u mellan 0 och 1.

acceleration $\dot{a} = k \cdot u$

a) Ställ upp en diff.ekv mellan u och v . hastighet

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = k \cdot u \Leftrightarrow \boxed{\dot{v} = k \cdot u}$$

↑
Linjärt!

b) Skriv systemet på tillståndsform

$$\boxed{Y = V}, Y = X$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ku \\ Y &= X \end{aligned}$$

c) Tillst.f. igen

$$\boxed{Y = P} \quad \text{position}$$

$$\dot{P} = V$$

Vi väljer $X_1 = V, X_2 = P$

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= ku \\ \dot{X}_2 &= X_1 \\ \therefore Y &= X_1 \end{aligned}$$

d)

Vi lägger till luft motstånd

$$\ddot{x} = -mx^2 + ku$$

$$Y = x$$

Systemet är inte linjärt eftersom

$$S(\lambda x) \neq \lambda \cdot S(x).$$

Vi låter $k=1$, $m=0.001$, $u^0=0.1$

Hitta den stationära hastigheten som motsvarar att gaspedalen är nedtryckt 10%

$$-0.001(x^0)^2 + u^0 = 0 \Rightarrow x^0 = \pm 10$$

$$\Rightarrow Y^0 = 10 \text{ m/s}$$



e) Linjärisera systemet kring (x^0, u^0, y^0)

Från d) vet vi att:

$$\dot{x} = -mx^2 + ku = f(x, u)$$

$$y = x = g(x, u)$$

Vi tar fram de partiella derivatorna.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -2mx, \quad \frac{\delta f}{\delta u} = k$$

$$\frac{\delta g}{\delta x} = 1, \quad \frac{\delta g}{\delta u} = 0$$

I uppgiften ges: $k = 1, m = 0.001, (x^0, u^0, y^0) = (10, 0.1, 10)$

Taylorutveckling (se s. 15)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x - x_0) + \frac{\delta f}{\delta u}(u - u_0) \\ g(x, u) \approx g(x_0, u_0) + \frac{\delta g}{\delta x}(x - x_0) + \frac{\delta g}{\delta u}(u - u_0) \end{array} \right.$$

Vi kommer bara behålla första termerna.

Vi inför nya beteckningar

$$\Delta x = x - \dot{x}^*$$

$$\Delta y = y - \dot{y}^*$$

$$\Delta u = u - \dot{u}^*$$

... och kan skriva systemet på formen.

$$\Delta \ddot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

$$\Delta \ddot{y} = C \Delta x + D \Delta u$$

... där $A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta u} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \frac{\delta g}{\delta x} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \frac{\delta g}{\delta u} \end{bmatrix}$

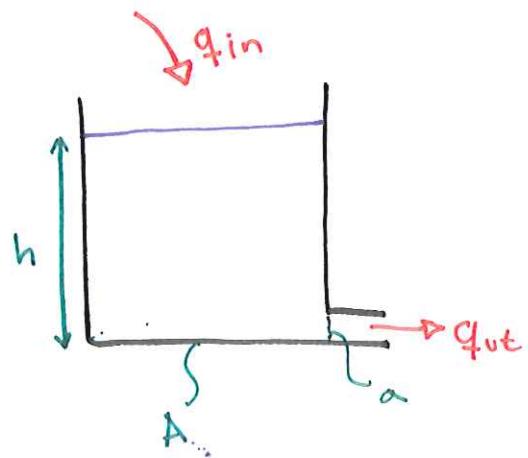
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \ddot{x} = -0.02 \Delta x + \Delta u \\ \Delta \ddot{y} = \Delta x \end{cases}$$

↗ stationära punkter
är insatta!

15

$$V_{ut} = \sqrt{2gh}$$

- a) Vad är en lämplig tillståndsvariabel för systemet?
Bestäm diffekvationen.



Höjden h är lämplig som tillståndsvariabel eftersom den har direkt koppling med q_{in} och q_{ut} .

$$q_{in} - q_{ut} = A \frac{\delta h}{\delta t}$$

$$q_{ut} = V_{ut} \cdot a = a \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow \dot{h} + \frac{a}{A} \sqrt{2gh} = \frac{1}{A} q_{in}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{h} + \frac{a}{A} \sqrt{2gh} = \frac{1}{A} q_{in} \\ q_{ut} = a \sqrt{2gh} \end{array} \right.$$

c) Linjärisera systemet kring punkten

$$q_{in} = q_{in}^0, h^0, q_{out}^0$$

$$h = 0 \Rightarrow \frac{a}{A} \sqrt{2gh^0} = \frac{1}{A} q_{in}$$

$$\Leftrightarrow h^0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{in}}{a} \right)^2$$

Partiella derivator $\begin{cases} f = h \\ g = q_{out} \end{cases}$

$$f'_h = -\frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2h}}, f'_{q_{in}} = \frac{1}{A}$$

$$g'_h = a \sqrt{\frac{g}{2h}}, g'_{q_{in}} = 0$$

Nu sätter vi $h = h^0$ och $\Delta h = h - h^0$, $\Delta q_{in} = q_{in} - q_{in}^0$...

$$\Delta h^0 = -\frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2h^0}} \Delta h + \frac{1}{A} \Delta q_{in}$$

$$\Rightarrow \Delta q_{out} = a \sqrt{\frac{g}{2h^0}} \Delta h$$

d) Vad blir $q_{ut}(t)$ om $q_{in}=0$ efter att systemet varit stationärt?

Från olinj. diff.ekv.

$$\dot{h} = -\frac{\alpha}{A} \sqrt{2gh} , \quad h(0) = h^{\circ}$$

Diff.ekvationen har lösningen:

$$h(t) = h^{\circ} \left(1 - \frac{\alpha}{A} \sqrt{\frac{g}{2h^{\circ}}} t \right)^2 , \quad 0 \leq t \leq \frac{A}{\alpha} \sqrt{\frac{2h^{\circ}}{g}} = T$$

$$\Rightarrow h(t) = h^{\circ} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2 , \quad 0 \leq t \leq T$$

$$q_{ut} = \alpha \cdot \sqrt{2gh} = \alpha \cdot \sqrt{2gh^{\circ}} \cdot \left(1 - \frac{t}{T} \right) , \quad 0 \leq t \leq T$$

Från linjära diff. ekvationer

$$\Delta \dot{h} = -\frac{1}{T} \Delta h - \frac{1}{A} q_{in}^{\circ}, \quad \Delta h(0) = 0$$

Ekvationen har lösningen:

$$\boxed{\Delta h(t) = 2h^{\circ}(e^{-\frac{t}{T}} - 1)}, \quad t \geq 0$$

$$\Delta q_{ut} = \frac{A}{T} \Delta h$$

$$\Rightarrow q_{ut} = q_{in}^{\circ}(e^{-\frac{t}{T}} - 1) + q_{tot}^{\circ} = \boxed{q_{tot}^{\circ} \cdot e^{-\frac{t}{T}}}, \quad t \geq 0$$

1.6

Skriv på tillståndsform

$$\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u \Leftrightarrow \ddot{y} = -3\ddot{y} - 2\dot{y} - y + u$$

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_3 = \dots$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Förtydligande:

$$\text{Rad 1: } \dot{y} = \dot{y} + 0$$

$$\text{Rad 2: } \ddot{y} = \ddot{y} + 0$$

$$\text{Rad 3: } \ddot{y} = -y - 2\dot{y} - 3y + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

1.7

$$\ddot{y} + \sqrt{y} + y\dot{y} = u^2 \Leftrightarrow \ddot{y} = -\sqrt{y} - y\dot{y} + u^2$$

a) Skriv systemet på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y \\ \dot{x}_2 &= \dot{y} \Rightarrow \dot{\dot{x}}_2 = \ddot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sqrt{x_1} - x_1 x_2 + u^2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$



b) Finn stationära punkter till systemet

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = \underline{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -\sqrt{x_1} - x_1 x_2 + u^2 \Rightarrow \sqrt{x_1} = u^2$$

Det finns oändligt många stationära punkter på formen $(x_1^*, x_2^*, u) = (t, 0, t^4)$

1.9

$$\ddot{r} = r \omega^2 - \frac{\beta}{r^2} + u(t)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Ställ upp de olinjära tillståndsekvationerna

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (f_1)$$

$$x_2 = \omega^2 x_1 - \frac{\beta}{x_1^2} + u \quad (f_2)$$

$$y = x_1 \quad (g)$$

b) Linjärisera kring $(r, \dot{r}, u) = (r^0, 0, 0)$

$$\Rightarrow x_2 = u = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \omega^2 x_1 - \frac{\beta}{x_1^2} \Leftrightarrow r_0^3 = \frac{\beta}{\omega^2}$$

Partiella derivator:

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_1} = 0, \quad \frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1, \quad \cancel{\frac{\delta f_1}{\delta u}} = 0$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \omega^2 + 2\beta/r_0^3 = 3\omega^2, \quad \frac{\delta f_2}{\delta x_2} = 0, \quad \frac{\delta f_2}{\delta u} = 0$$

$$\frac{\delta g}{\delta x_1} = 1, \quad \frac{\delta g}{\delta x_2} = 0, \quad \frac{\delta g}{\delta u} = 0$$

Det linjära systemet blir:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3w^2 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$