1.1)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -3y + 5z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases} \underset{\text{återsubst}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.2)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 6y + 11z = 35 \\ -3x + 5y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III + 3I \end{array} \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2y + 9z = 31 \\ -y + 4z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ \\ 2III - II \end{array} \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2y + 9z = 31 \\ -z = -3 \end{cases} \underset{\text{å.s}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

1.3)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 6y + 6z = 2 \\ -3x + 5y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III + 3I \end{array} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ -y + 4z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ \\ 2III - II \end{array} \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2y + 4z = 0 \\ 4z = 12 \end{cases} \underset{\text{å.s}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

1.4) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-6y+6z=2 \\ -3x+5y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+3I \end{matrix} \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y+4z=0 \\ -y+2z=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2III-II \end{matrix} \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y+4z=0 \\ 0=12 \end{cases}$ Lösning saknas

omöjligt

1.8) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \\ -5x+2y=-13 \\ 4x-3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-3I \\ III+5I \\ IV-4I \end{matrix} \begin{cases} x-2y=1 \\ 10y=10 \\ -8y=-8 \\ 5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

1.9) $\begin{cases} x+y=-4 \\ x-2y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-3I \end{matrix} \begin{cases} x+y=-4 \\ -3y=6 \quad (y=-2) \\ y=13 \end{cases}$ omöjligt

Lösning saknas

1.11)
$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-6y+6z=4 \\ -3x+5y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III+3I \end{matrix} \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y+4z=2 \\ -y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2III-II \end{matrix} \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y+4z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

onödig

parameterlösning, d.v.s.

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases}$$

eller med "t sist" som i facit

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$$

<u>Anm:</u> Man kan också välja $y=t$. Då fås

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2} \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Regel: "LTH undervisar bråk om möjligt"

1.12) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-4z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-5z=-7 \\ 6y-10y=-14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-2II \end{matrix} \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-5z=-7 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-5z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow$ parameterlösning ges

onödig

$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}t+\frac{5}{3} \\ y=\frac{5}{3}t-\frac{7}{3} \\ z=t \end{cases}$ $\quad \left(x=y-2z+4=\frac{5}{3}t-\frac{7}{3}-2t+4\right)$

<u>Facit:</u> $\begin{cases} x=t \\ y=6-5t \\ z=5-3t \end{cases}$

Är lösningsmängderna samma?

Eftersom "t:na" olika skriver vi vår lösning med s istället

$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}s+\frac{5}{3} \\ y=\frac{5}{3}s-\frac{7}{3} \\ z=s \end{cases}$ och gör bytet $s=5-3t$ $(z=z)$.

Då fås $y=\frac{5}{3}s-\frac{7}{3}=\frac{5}{3}(5-3t)-\frac{7}{3}=6-5t$ ok!

$x=-\frac{1}{3}s+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}(5-3t)+\frac{5}{3}=t$ ok!

"Inga bråk på LTH"

1.13)
$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-y+2z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix}\begin{cases} x+2y-z=3 \\ -3y+3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ II/3 \end{matrix}\begin{cases} x+2y-z=3 \\ -y+z=1 \end{cases} \underset{\text{å.s.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-t+5 \\ y=t-1 \\ z=t \end{cases}$$

1.15)
$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=1 \\ y-3z-w=5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Färdiggausiat, två frihetsgrader)

$$\begin{cases} x=-9-9s-6t \\ y=5+3s+t \\ z=s \\ w=t \end{cases} \qquad x=1-2(5+3s+t)-3s-4t$$

1.17)
$$\begin{cases} a^2x+2y+3z=-1 \\ ay+(a-1)z=a+1 \\ \underbrace{(a^2-1)}_{(a+1)(a-1)}z=a+1 \end{cases} \overset{\substack{\text{Om } a\neq\pm1 \\ a\neq0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \overset{*}{=} \frac{-3}{a(a-1)} \\ y=1 \\ z=\frac{1}{a-1} \end{cases}$$

$$* \quad a^2x=-1-2y-3z=-1-2-\frac{3}{a-1}=\frac{-3(a-1)-3}{a-1}=\frac{-3a}{a-1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3}{a(a-1)}$$

$\longrightarrow$

1.17)

Om $a=0$ fås
$$\begin{cases} 2y+3z=-1 \\ -z=1 \\ -z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Om $a=1$ fås
$$\begin{cases} x^2+2y+3z=-1 \\ y=2 \\ 0=2 \end{cases}$$
orimligt

Lösning saknas

Om $a=-1$ fås
$$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -y-2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$$
onsdig

1.19)
$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ II-I \end{matrix} \begin{cases} x+ay=1 \\ (-1-a)y=-2 \end{cases}$$

Om $a\neq -1$ fås
$$\begin{cases} x=1-a\cdot\frac{2}{1+a}=\frac{1+a-2a}{1+a}=\frac{1-a}{1+a} \\ y=\frac{2}{1+a} \end{cases}$$

Om $a=-1$ fås
$$\begin{cases} x-y=1 \\ 0=-2 \end{cases}$$
orimligt

Lösning saknas.

→ 1,18

1.18): $a \neq 0$
$$\begin{aligned} a\cdot & \begin{cases} ax+y+2z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+2z=0 \end{cases} \end{aligned} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax+y+2z=4 \\ ax+ay+az=a \\ ax+a^2y+2az=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+y+2z=4 \\ (a-1)y+(a-2)z=a-4 \\ (a^2-1)y+(2a-2)z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+y+2z=4 \\ (a-1)y+(a-2)z=a-4 \\ \left[(2a-2)-(a+1)(a-2)\right]z=-4-(a+1)(a-4) \end{cases}$$

Sista raden

$$(-a^2+3a)z=-a^2+3a \qquad a-1 \xrightarrow{\cdot(a+1)} a^2-1$$

Entydig lösning då $-a^2+3a=a(-a+3)\neq 0$
dvs då $a\neq 0$, $a\neq 3$.

Om $a=0$ fås (i originalekvsystem).

$$\begin{matrix}\mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y+2z=4 \\ x+y+2z=1 \\ x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+2z=4 \\ x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+2z=4 \\ -y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x= \\ y=1 \\ z= \end{cases} \quad \text{entydig lösning}$$

Om $a=3$ fås

$$\begin{cases} 3x+y+2z=4 \\ 2y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=-2t-1 \end{cases}$$

$\boxed{1,20}$

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = 0 \\ I_2 + I_4 + I_5 = 0 \\ U_3 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \iff 3 + I_1 - I_3 = 0 \\ U_4 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0 \iff 2 + I_2 - I_4 = 0 \\ -U_3 + R_3 I_3 - U_4 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0 \iff -3 + I_3 - 2 + I_4 - 4I_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left[R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_5 I_5 = 0 \iff I_1 + I_2 - 4I_5 = 0 \right]$$

ger ekv systemet

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = 0 \\ I_2 + I_4 + I_5 = 0 \\ I_1 - I_3 = -3 \\ I_2 - I_4 = -2 \\ I_3 + I_4 - 4I_5 = 5 \end{cases} \overset{\text{"Fusk"}}{\iff} \begin{cases} I_1 = -1,25 \\ I_2 = -0,75 \\ I_3 = 1,75 \\ I_4 = 1,25 \\ I_5 = -0,5 \end{cases}$$

1,26 b)

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + 4y = 4 \\ x - by = a \end{cases} \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax + a^2y = 2a \\ ax + 4y = 4 \\ ax - aby = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + a^2y = 2a \\ (4-a^2)y = 4-2a \\ (-ab-a^2)y = a^2-2a \end{cases}$$

Enda möjligheten till oändligt många lösningar är

$$\begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ 4 - 2a = 0 \\ -ab - a^2 = 0 \\ a^2 - 2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

och då fås

$$2x + 4y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t \end{cases}$$

Om $a = 0$ fås

$$\begin{cases} x = 2 \\ 4y = 4 \\ x - by = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ b = 2 \end{cases}\right\} \text{entydig lösning}$$