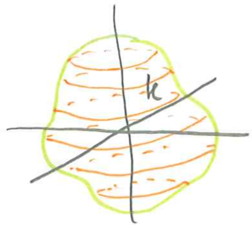
TRIPPELINTEGRAL

integral $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ av $f(x,y,z)$ över en kropp K i rummet

Vi kan inte se bilden framför oss som vi kunde med t.ex. dubbelintegralen, men vi ger det en fysikalisk tolkning:

Om K är en kropp i rummet och $\rho(x,y,z)$ densiteten i (x,y,z) så är K:s massa $= \boxed{\iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$



Speciellt om $\rho(x,y,z) = 1$: K:s volym $= \iiint_K 1\,dx\,dy\,dz$

Upprepad integration som vanligt:

Ex. $I = \iiint_K xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, $\quad K: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2z^3\,dx \right) dy \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y^2 z^3 \right]_0^1 dy \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 y^2 z^3\,dy \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} z^3 \right]_0^1 dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 z^3\,dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

Men vi skulle kunna tolka I som

$$\iint_D \left(\int_0^1 xy^2z^3\,dx \right) dy\,dz, \quad D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

dvs som en enkelintegral följd av en dubbelintegral eller tvärtom.

alltså 3 olika sätt! :)

Typ

$\underbrace{\iiint}_{\text{De först}}$ $\underbrace{\iiint}_{\text{De sist}}$

$\int \left(\iint f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz,$

$\iint \left(\int f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$

Byt kordinater direkt!
Typ till rymdpolära
Repetera!

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

STAPLAR ||||||

PANNKAKOR

POLÄRA KORDINATER Δ svepa genom

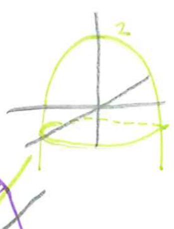
$\boxed{\text{EX}}$ Volymen av kroppen som begränsas av ytorna $x^2+y^2-z^2=0,\ z \ge 0$ och $z = 2 - x^2 - y^2$

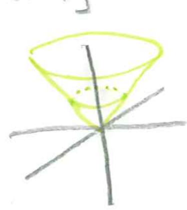
Lösning: Rita! yta 1: $x^2+y^2-z^2=0,\ z\ge 0 \Leftrightarrow z^2 = x^2+y^2,\ z \ge 0$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$

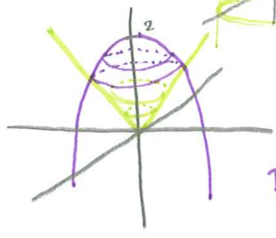
Yta 2: $z = 2-(x^2+y^2)$

$y=0: z = 2-x^2$





Tillsammans: generös glasstrut



Pannkakor går bra!

Vi Ser: Övre yta = $z = 2-(x^2+y^2)$

undre yta = $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Projektionen D i xy-planet: $\sqrt{x^2+y^2} = 2-(x^2+y^2)$

Löser med $r = \sqrt{r^2+y^2}$ $\Leftrightarrow$ $r^2+r-2=0$

$r=1$, $\cancel{r=-2}$ falsk, radien är positiv

D är en cirkelskiva med radien 1

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} 1dz \right) dxdy = \iint [z]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= \iint_D \left(2-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = y\sin\varphi \end{bmatrix} \quad E: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

fd.

$$= \iint_E (2-r^2-r)\, r\, dr = \int_0^1 (2r-r^3-r^2)dr \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi =$$

$$2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = 2\pi \frac{5}{12} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$