Tillämpningar av integraler

Vi har sett volymen av en kropp K:

$$\boxed{V: \iiint_K 1 \, dxdydz}$$

Speciellt "kroppen mellan två funktionsytor"

$$K: \begin{cases} f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

$$V = \iiint_K dxdydz = \iint_D [z]_{f(x,y)}^{g(x,y)} = \iint_D g(x,y) - f(x,y) \, dxdy$$

$\boxed{8.6}$ Volymen av K som begränsas av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 4x, \quad |z| \leq x^2 + y^2$$

$(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ $\Leftrightarrow$

Cirkelskiva med radie 2 och centrum i $(2,0)$

$z \geq 0$

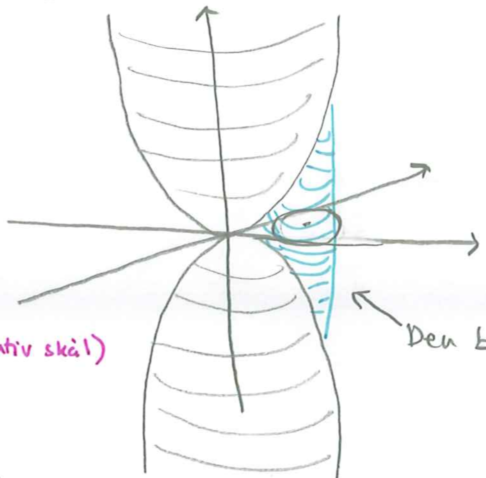
$z \leq x^2 + y^2$ (skål)

$z \leq 0$

$-z \leq x^2 + y^2$

$z \geq -(x^2+y^2)$ (negativ skål)

Mellan 2 skålar



Projektionen i xy-planet: $\begin{cases} x = r\cos\varphi + 2 \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$V = \iint_D \underset{\text{övre}}{(x^2+y^2)} - (-(x^2+y^2)) \, dxdy$$

$E = 0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\iint_D = 2(x^2+y^2)\, dxdy = 2\iint_E ((r\cos\varphi + 2)^2 + (r\sin\varphi)^2) r$$

$$= 2\iint_E (r^2\cos^2\varphi + 4r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + 4) r \, drd\varphi$$

$$= 2\iint_E (r^3 + 4r^2\cos\varphi + 4r)\, drd\varphi = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{4}{3}r^3\cos\varphi + 2r^2\right]_0^2$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 4 + \frac{32}{3}\cos\varphi + 8 \, d\varphi = 2\left[12\varphi + \frac{32}{3}\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = 2(24\pi + 0 - 0) =$$

$$48\pi$$

TRÖGHETSMOMENT

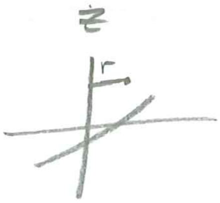
Ingick inte, lyssnade bara ♡

Tröghet i vår kurs:

$$J = \iiint_K r(x,y,z)^2 \underbrace{\overset{\text{Densitet}}{\rho(x,y;z)}\ \overbrace{dxdydz}^{dV}}_{dm}$$

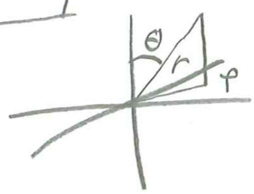
rotationsaxeln = z axeln

så $r(x;y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$



Ex. Tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln för den homogena kroppen

$K:\ x^2+y^2+z^2 \le R^2$ med $\boxed{\rho = 1}$



Lösning

$$J = \iiint_K (x^2+y^2)\cdot 1 \ dxdydz$$

Klot med radie r!

Rymdpolära kordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$J = \iiint_L (r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\boxed{r^2\sin\theta}$$

$$L = \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \iiint_L (r^4\sin^3\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^R r^4\,dr \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

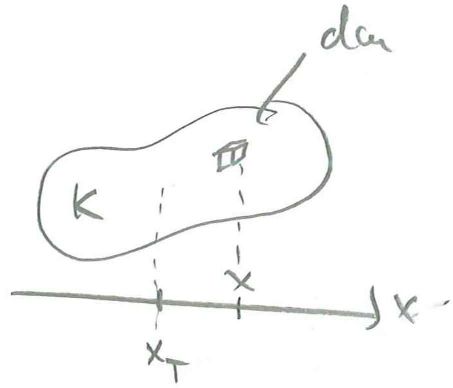
$$= 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\int(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi R^5}{5}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi =$$

$$= 2\pi\frac{R^5}{5}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8\pi R^5}{15}$$

Tyngdpunkt

För k med massa m

$$x_T = \frac{1}{m}\int_k x\,dm$$



Nu: $$x_T = \frac{1}{\underbrace{\iiint_K \rho(x,y,z)\,dxdydz}_{\text{massan}}} \underbrace{\iiint_k x\rho(x,y,z)\,dxdydz}_{\text{massan med hänsyn på var den befinner sig}}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Tyngdpunktens koordinater för det homogena halvklotet

$$k = x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0$$

ρ = spelar ingen roll då homogen
här 1 bara för att!

Lösning: Uppenbart att $x_T = y_T = 0$
Då symmetrisk och homogen!

För z_T: Rymdpolära koordinater

$$k \to L : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

TÄLJARE: $$\iiint_k z \cdot 1\,dxdydz = \iiint_k r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^3\,dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

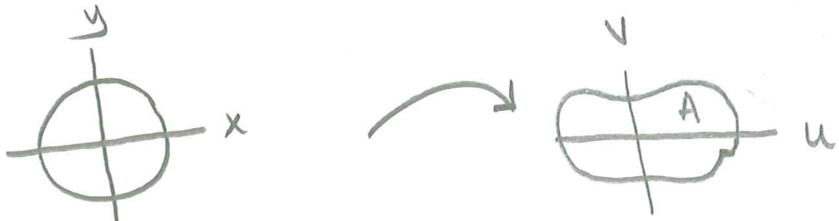
NÄMNARE: $$\iiint_k 1\,dxdydz = \text{halvklotets volym} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{6} = \frac{2\pi R^3}{3}$$ eller räkna!

$$z_T = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{\pi R^4}{4}\cdot\frac{3}{2\pi R^3} = \boxed{\frac{3}{8}}R$$

Tänk på vad du sysslar med!

Tyngdpunkt = $(0,0,\frac{3}{8}R)$

$\boxed{7.55}$



$x^2+y^2 \leq 1$

area π

area ?

$$\begin{cases} u = x^3 \\ v = y^3 \end{cases}$$

arean av A $\iint_A 1 \, du\, dv$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^3 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{vmatrix}$$

$$= 9x^2y^2 - 0$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \cdot \left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| dx\, dy$$

$$A = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 9x^2y^2 \, dx\, dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & E: \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \\ y = r\sin\varphi & \end{array} \right]$$

$$= 9 \iint_E r^2\cos^2\varphi \; r^2\sin^2\varphi \cdot r \, dr\, d\varphi = 9 \int r^5 \, dr \int \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= 9 \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \, d\varphi = 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4\varphi}{2} \, d\varphi$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} (2\pi) = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

WOW !!!