

Talföljder

Om $A = \mathbb{N}$ då kallas f en talföljd.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

En sekvens, t.ex. 1, 4, 9, 16, ..., är alltså en talföljd.

$$g_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{1}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1}$$

Summor

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$$

$$\text{Aritmetisk summa } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Bevis: Sätt } S_n = \sum_{k=1}^n k. \text{ Då är } 2 \cdot S_n = n(n+1)$$

$$\text{Geometrisk summa } \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

Bevis: Multiplicera båda leden med $(x-1)$

$$(x-1) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^{k+1} - \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^n x^k = x^{n+1} - 1$$

$$\text{Teleskopsumma: } x + x^2 + \dots + x^{n+1} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) = x^{n+1} - 1$$

Defn.

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k, \quad k \geq 0 \quad \text{0!} = 1$$

binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \geq k \geq 0$$

"höver k "

Påstående $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- tolkningen av $\binom{n}{k}$ är att om du har en mängd av n element och vill välja ut k element då kan det göras på $\binom{n}{k}$ sätt
du kan välja k element på

$$\underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k\text{-faktorer}} \text{ sätt}$$

k -faktorer

men ordern spelar ingen roll så vi delar med $k(k-1)\dots 2 \cdot 1$ (tänk $2 \times 1, 1 \times 2$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 2 \cdot 1}{k!(n-k)!(n-k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

Binomialsatsen. För $n \geq 0$ gäller att

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(x+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-k} 1^k$$

Bevrs: $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$

Koeff framför $a^{n-k}b^k$ svarar mot det antal termer där b väljs från k av de n parenteserna.

4.18 Bestäm den konstanta termen i $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{15}$

Binomialsatsen ger att

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x^3}\right)^{15-k} \\ &= \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{2k} x^{3k-45} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{5k-45} \end{aligned}$$

Lös $5k - 45 = 0$, dvs $k = 9$

$$k=9 \quad \binom{15}{9} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Förkorta 9, 8, 7, ..., 2, 1
från 9!

Notering!

$$\binom{15}{9} = \binom{15}{6}, \text{ eftersom } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pascals triangel = Binomialtriangel

Vad är summan av rad 10?

Svar: Använd binomialsatsen

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots$$

$$a=1=b \quad = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$(1+1)^{10} = 2^{10}$$

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \quad 0 \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \quad 2 \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \quad 3 \end{array}$$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$$

Påstående $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- tolkningen av $\binom{n}{k}$ är att om du har en mängd av n element och vill välja ut k element då kan det göras på $\binom{n}{k}$ sätt
du kan välja k element på

$n(n-1)\dots(n-k+1)$ sätt

k -faktorer

men ordern spelar ingen roll så vi delar med $k(k-1)\dots 2 \cdot 1$ (tänk $2 \times 1, 1 \times 2$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 2 \cdot 1}{k!(n-k)!(n-k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

Binomial satsen. För $n \geq 0$ gäller att

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(x+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-k} 1^k$$

Beweis: $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$

Koeff framför $a^{n-k}b^k$ svarar mot det antal termer där b väljs från k av de n parenteserna.