Talföljder

Om $A = \mathbb{N}$ då kallas f en talföljd.

$f: A \to \mathbb{R}$

En sekvens, t.ex 1, 4, 9, 16, ..., är alltså en talföljd.

$$g_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{1} \qquad \frac{\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1}$$

Summor

$$1+2+3+\ldots 99+100 = \sum_{n=1}^{100} n$$

Aritmetisk summa $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Bevis: Sätt $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Då är $2 \cdot S_n = n(n+1)$

Geometrisk summa $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$, $x \neq 1$

Bevis: Multiplicera båda leden med $(x-1)$

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - 1$$

Teleskopsumma: $\cancel{x} + \cancel{x^2} + \ldots x^{n+1} - (1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \ldots + \cancel{x^n}) = x^{n+1} - 1$

Defn.

$k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1)k$, $k > 0$ $\quad 0! = 1$

binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \geq k \geq 0$$

"n över k"

Påstående $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ $\quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

- tolkningen av $\binom{n}{k}$ är att om du har en mängd av n element och vill välja ut k element då kan det göras på $\binom{n}{k}$ sätt

du kan välja k element på

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k\text{-faktorer}} \text{ sätt}$$

men ordern spelar ingen roll så vi delar med $k(k-1)\ldots 2\cdot 1$ (tänk 2×1, 1×2)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)\cancel{(n-k)\ldots 2\cdot 1}}{k!\cdot\cancel{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$$

Binomialsatsen. För $n \geq 0$ gäller att

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}\binom{n}{n}b^n$$

$$(x+1)^{20} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Bevis: $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$

Koeff framför $a^{n-k}b^k$ svarar mot det antal termer där b väljs från k av de n paranteserna.

4.18 Bestäm den konstanta termen i $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15}$

Binomialsatsen ger att

$$\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}(x^2)^k\left(\frac{1}{x^3}\right)^{15-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}x^{2k}x^{3k-45} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}x^{5k-45}$$

Lös $5k-45=0$, dvs $k=9$

$k=9$ $\quad \binom{15}{9} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$ $\quad$ Förkorta $9\cdot8\cdot7\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ från $9!$

Notering!

$\binom{15}{9}=\binom{15}{6}$, eftersom $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Pascals triangel = Binomialtriangel

Vad är summan av rad 10?

Svar: Använd binomialsatsen

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b \ldots$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$a=1=b$

$(1+1)^{10} = 2^{10}$

$\binom{0}{0}$ $\quad$ 0

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\quad$ 1

$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{3}$ $\quad$ 2

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ $\quad$ 3

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

Påstående $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

- tolkningen av $\binom{n}{k}$ är att om du har en mängd av n element och vill välja ut k element då kan det göras på $\binom{n}{k}$ sätt
du kan välja k element på

$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k\text{-faktorer}}$ sätt

men ordern spelar ingen roll så vi delar med
$k(k-1)\dots 2\cdot 1$ (tänk 2×1, 1×2)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)\cancel{(n-k)\dots 2\cdot 1}}{k!\cancel{(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}$$

Binomialsatsen. För $n \geq 0$ gäller att

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}\binom{n}{n}b^n$$

$$(x+1)^{20} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Bevis: $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$
Koeff framför $a^{n-k}b^k$ svarar mot det antal termer där b väljs från k av de n paranteserna.