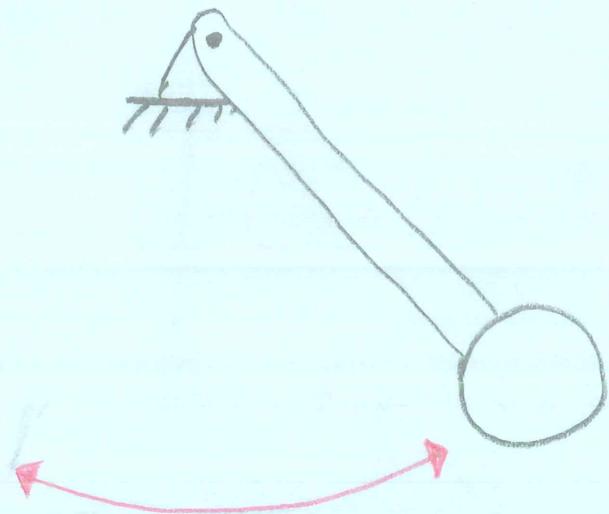
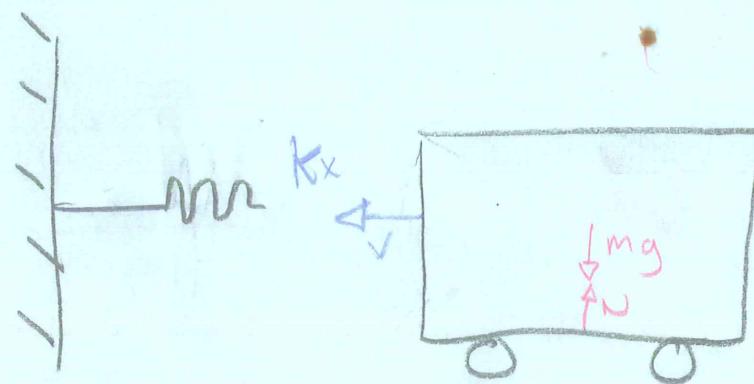


Svängningar - Pendelrörelse



Friläggning
Polärt koordinats.
Kraftekvationer
Diffekv.
Periodtid

ex



$$x\text{-led: } -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0$$

Beteckna faktorn framför x som ω_n^2

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0}$$

Bläddra för att se lösning!

$$\text{Ansats: } x = A \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x} = A \omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{x} = -A \omega_n^2 \sin(\omega_n t)$$

TRUE

$$\text{Insättning: } -A \omega_n^2 \sin \omega_n t + \omega_n A \sin \omega_n t = 0$$

ω_n = Vinkelhastighet [rad/s]

~~och~~ ω_n är vinkel-

frekvensen utan dämpning etc.

Matematisk pendel:

Punktmassa fäst i masslös stång

Fysikalisk pendel:

Utfördelad massa på hela pendeln.

Tröghetsmoment

Beskriver massans fördelning

Mått på rotationströghet.

Kastparabel - kulstötare

Tidsberoend uttryck för:

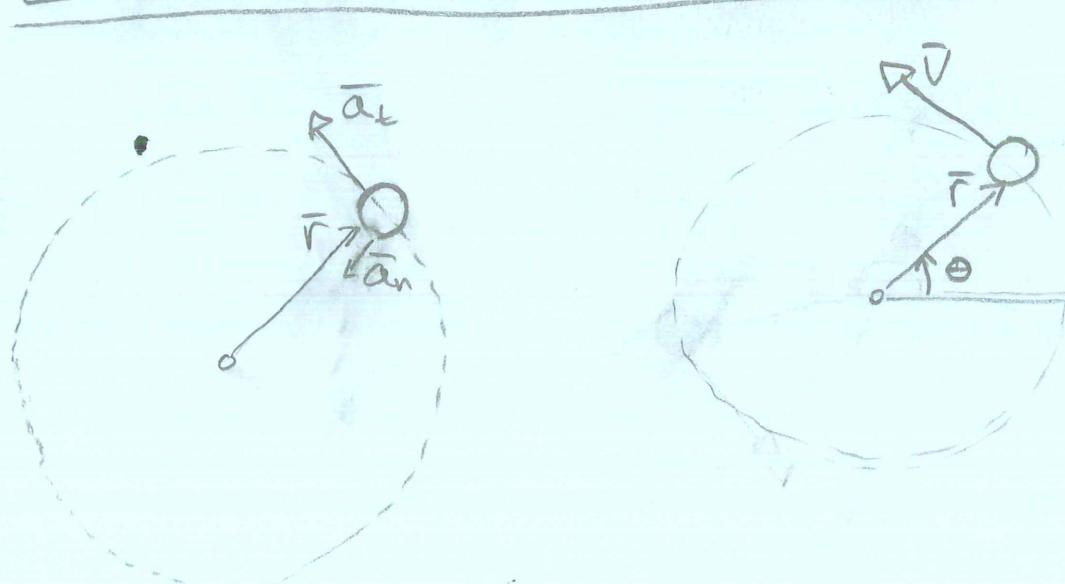
Fart
Sträcka
acceleration

Kombinera för att få skiten tidsberoende.

MASSIV TEORI

Följer...

Cirkelrörelse i vektorform



Jämför med tidigare uttryck:

$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{s} \vec{e}_t \\ \vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = (\text{cirkel}) = -r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

konst.
radie plan

$$\begin{cases} \vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{\ddot{s}^2}{r} \vec{e}_n \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z = \\ = (\text{cirkel}) = -r \ddot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Inför beteckningar:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \dot{\theta} \vec{e}_z, \omega = \text{vinkelhastighet}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{e}_z = \ddot{\theta} \vec{e}_z, \alpha = \text{vinkelacceleration}$$

Vi vill skriva detta på
vektorform genom utnyttjande
av kryssprodukt.

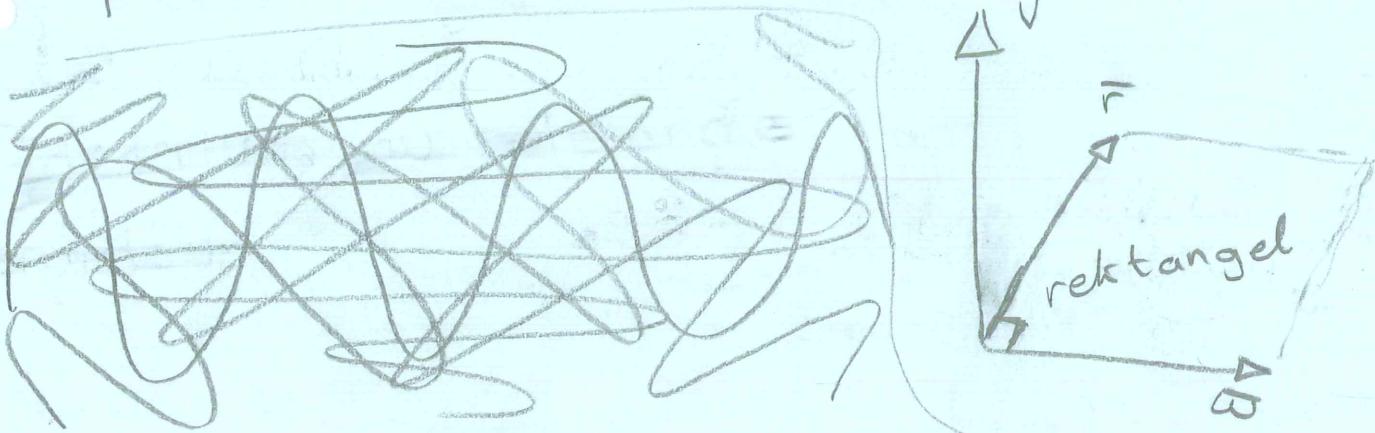
Omskrivning:

$$\bar{J} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\alpha} \times \bar{r}$$

Hon påstår
Detta!

- Allt ligger 90° till varandra, så storleken blir storheterna multiplicerat med varandra



Tidsderivata av roterande enh.-vektor

$(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$: Fix bas

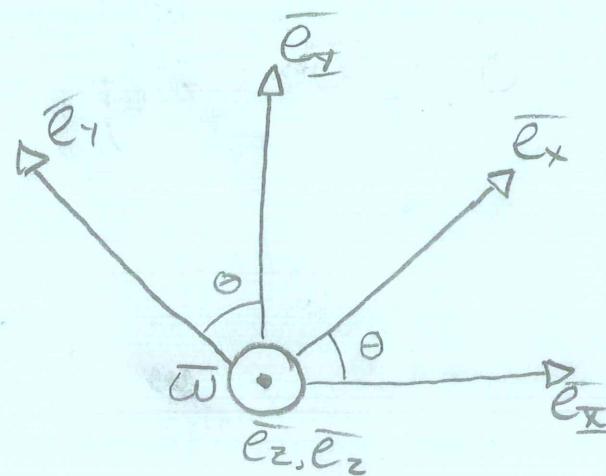
(e_x, e_y, e_z) : roterande bas

Uttryck (e_x, e_y, e_z) i den fixa basen:

$$\hat{e}_x = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\hat{e}_y = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1)$$



Tidsderivera

$$\dot{\vec{e}}_x = \frac{de_x}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \dot{\theta} = \boxed{\dot{\theta} \vec{e}_y}$$

$$\dot{\vec{e}}_y = \frac{de_y}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \dot{\theta} = \boxed{-\dot{\theta} \vec{e}_x}$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \frac{de_z}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (0, 0, 0) \dot{\theta} = \boxed{0}$$

Hon påstår följande:

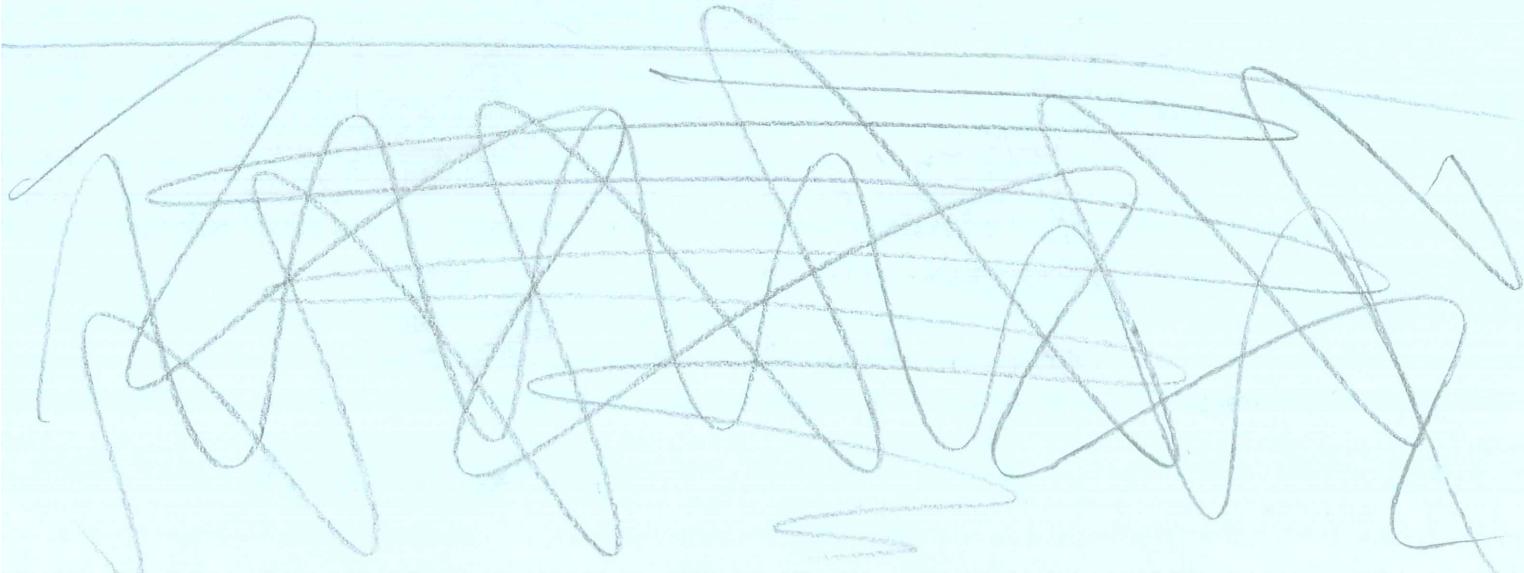
$$\dot{\theta} \vec{e}_y = \vec{\omega} \times \vec{e}_x$$

$$-\dot{\theta} \vec{e}_x = \vec{\omega} \times \vec{e}_y$$

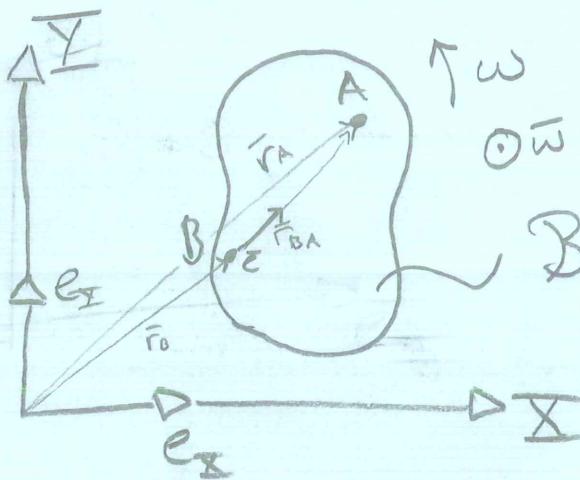
$$\vec{0} = \vec{\omega} \times \vec{e}_z$$

Testa med högerhandsregeln och övertygadig om att det stämmer.

Vi körer det!



Sambandsformeln för hastighet och acceleration



B (curly B): stel kropp

Viktigt, ej elastisk
korrigert

$$|\bar{F}_{BA}| = \text{konstant} \quad \leftarrow \text{längden på vektorerna är konstant}$$

Position: $\bar{r}_A = \bar{r}_B + \bar{r}_{BA}$

Hastighet: $\dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_B + \dot{\bar{r}}_{BA} \Rightarrow \bar{v}_A = \bar{v}_B + \dot{\bar{r}}_{BA}$

Vad innebär $\dot{\bar{r}}_{BA}$?

- Inför \bar{e} : enh.-vektor i \bar{r}_{BA} 's riktning

Utnyttja det härledda sambandet:

$$\dot{\bar{e}} = \bar{\omega} \times \bar{e}$$

$$\dot{\bar{r}}_{BA} = (|\bar{r}_{BA}| \cdot \dot{\bar{e}}) = |\bar{r}_{BA}| \dot{\bar{e}} = |\bar{r}_{BA}| \omega \times \bar{e} =$$

$$= \bar{\omega} \times |\bar{r}_{BA}| \bar{e} = \boxed{\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}}$$

sambandsf. för hastigheter

$$\boxed{\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}}$$

Jmf. m. cirkelrörelse

Tidsderivera samb. f. för hastigheter:

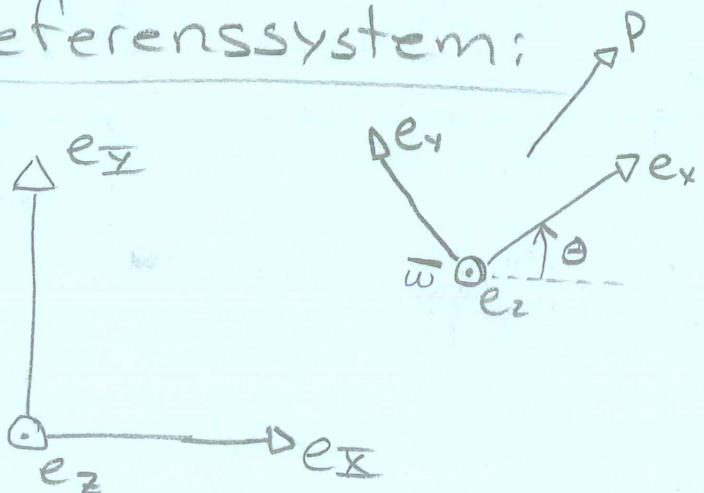
$$\dot{\bar{V}}_A = \dot{\bar{V}}_B + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \underbrace{\dot{\bar{r}}_{BA}}_{\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}}$$

\Rightarrow Samb.f för accelerationer

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}) + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{BA}$$

Jmf. med cirkelrörelse

Sambandet mellan tidsderivator i olika referenssystem:



(e_x, e_y, e_z) : fix bas

(e'_x, e'_y, e'_z) : rot. bas

$$\begin{aligned}\bar{P} &= P_x \bar{e}_x + P_y \bar{e}_y + P_z \bar{e}_z \\ &= P_x e_x + P_y e_y + P_z e_z\end{aligned}$$

Tidsderivata i rörligt system:

$$\dot{\bar{P}}(e_x, e_y, e_z) = \dot{P}_x \bar{e}_x + \dot{P}_y \bar{e}_y + \dot{P}_z \bar{e}_z$$

Innehåller ingen info om rotationen av (e_x, e_y, e_z) .

Tidsderivata i fixt system:

$$\dot{\bar{P}}(e_x, e_y, e_z) = \dot{P}_x e_x + \dot{P}_y e_y + \dot{P}_z e_z = \underbrace{\bar{\omega} \bar{e}_y}$$

$$= \underbrace{\dot{P}_x e_x + \dot{P}_y e_y + \dot{P}_z e_z}_{\dot{P}(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)} + P_x \dot{\bar{e}}_x + P_y \dot{\bar{e}}_y + P_z \dot{\bar{e}}_z =$$

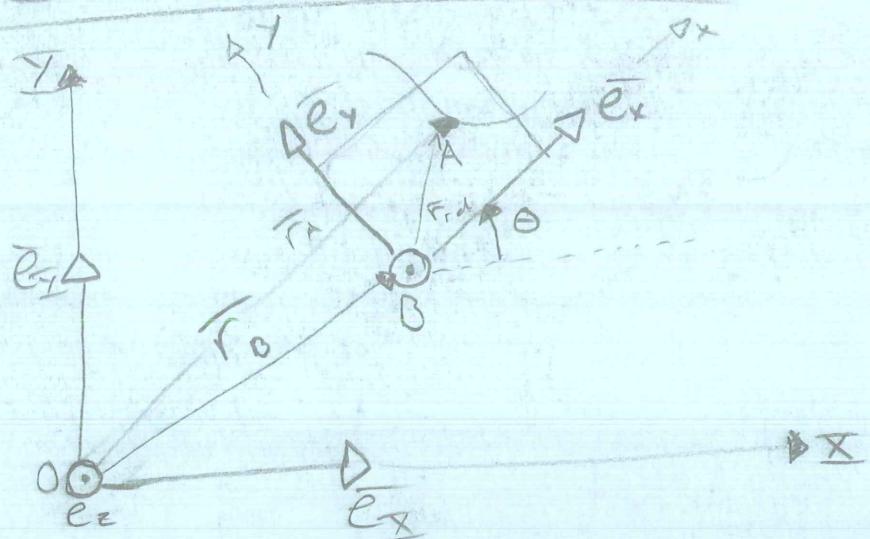
Detta eftersom enh.-vektorerna rör sig
i förhållande till det rörliga systemet.

$$= \dot{\bar{P}}(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z) + \bar{\omega} \times (P_x \bar{e}_x + P_y \bar{e}_y + P_z \bar{e}_z) =$$

$$= \boxed{\dot{\bar{P}}(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z) + \bar{\omega} \times \bar{P}}$$

Nu böjtar det årtas sig...

Coriolis teorem



A rör sig i förhållande till det roterande systemet, som i sittur rör sig i förhållande till det fixa.

- Basen $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)_B$ roterar med vinkelhastigheten $\bar{\omega}$ relativt basen $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)_O$.
- A rör sig relativt både $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)_B$ och $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)_O$.
- Storheter som mäts i det roterande systemet indexeras "rel"

Position: $\bar{r}_A = \bar{r}_B + \bar{r}_{rel}$

Hastighet: $\dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_B + \dot{\bar{r}}_{rel} \Rightarrow \bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{rel}$

Vadför skriva på detta sätt?

Vektorerna \bar{r}_A och \bar{r}_B mäts och
deriveras i ett fixt system.

Vektorn \bar{r}_{rel} mäts i ett rörligt system
och deriveras i ett fixt system.

TVÅ delar i $\dot{\bar{r}}_{rel}$:

$$\dot{\bar{r}}_{rel} = \underbrace{\dot{\bar{r}}_{rel}(e_x, e_y, e_z)_B}_{\bar{v}_{rel}} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rel}$$

Hastighet kan skrivas:

$$\bar{v}_A = \underbrace{\bar{v}_B + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rel}}_{\bar{v}_{sp}} + \bar{v}_{rel}, \quad \bar{v}_{sp} = \text{Systempunktens hastighet.}$$

Systempunkten är fix i det roterande
systemet. I detta ögonblick sammanfaller
A med systempunkten.

Acceleration:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{rel} + \vec{r}_{rel}$$

TVÅ delar i Fred och Irred



Omskrivning:

$$\bar{\alpha}_A = \bar{\alpha}_B + \bar{\kappa} \times \bar{r}_{rd} + \bar{\omega} \times \left[\dot{\bar{r}}_{rd}(e_x e_y e_z)_B + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rd} \right] + \\ + \left[\dot{\bar{r}}_{rd}(e_x e_y e_z) + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rd} \right]$$

Detta ger:

$$\alpha_A = \alpha_B + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{rel} + \bar{\omega} \times [\bar{v}_{rel} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rel}] + [a_{rel} + \bar{\omega} \times v_{rel}]$$

Coriolis Theorem;

$$\overline{\alpha}_A = \underbrace{\alpha_B + \bar{\alpha} \times r_{rel} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{rel})}_{\bar{\alpha}_{SP}} + \underbrace{2 \bar{\omega} \times v_{rel} + \bar{\alpha}_{rel}}_{\bar{\alpha}_{CGF}}$$