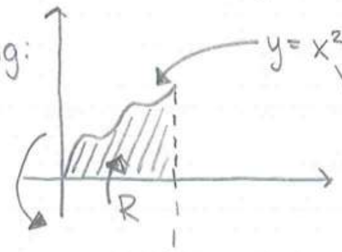
Seminarium 2015-11-27

Tentauppgift

① Området $R = \left\{(x,y);\ 0 \leq y \leq x^2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}},\ 0 \leq x \leq 1\right\}$ roteras kring x-axeln. Bestäm rotationsvolymen. (0,5p)

Lösning:



Rotationskroppens volym runt x-axeln är $\pi\int_0^1 \left(x^2\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2}\, dx$

$= [\text{polynomdivision}]$

$$= \pi\int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \pi\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \boxed{\pi\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx}$$

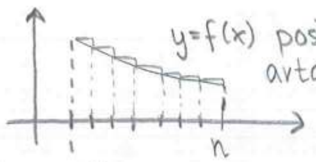
$$\pi\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\begin{matrix} s = x^2+1 \\ ds = 2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{s}\, ds = \frac{\pi}{2}\Big[\ln|s|\Big]_1^2$$

Tillbaka till ursprungsekvation $\pi\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi\frac{1}{2}\Big[\ln|s|\Big]_1^2$

$$\boxed{= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\ln 2}$$

② Förklara med hjälp av en figur varför $\ln n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ konvergerar serien $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$? (0,4p)

Lösning: Påstående:



$$\Rightarrow \int_1^n f(x)\,dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx + f(1)$$

Nu för $f(x) = \frac{1}{x}$ som är positiv och avtagande i $[1,n]$

Påståendet ger $\ln n \leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}\,dx}_{\ln n} + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\text{Men } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty \quad \text{ty } \infty \leftarrow \ln n \leq \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ då } n \to \infty$$

dvs. Serien är divergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

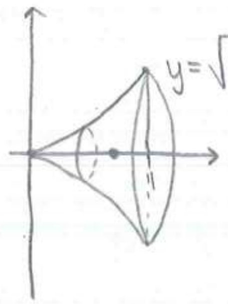
③ Kurvan $y=\sqrt{\ln(x+1)}$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln och bildar en homogen rotationskropp k.

a) Beräkna volymen av k [densitet $\rho = \rho_0 \leftarrow$ konstant]

b) Bestäm tyngdpunkten (masscentrum) för k.

(Ledning: $x_T = \dfrac{1}{m}\int_k x\,dm$, där m är massan av k.)

Lösning:

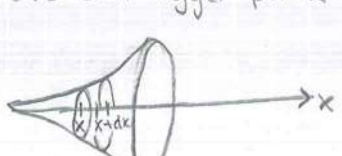


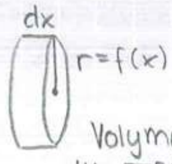
(x_T, y_T, z_T)

b) Ty densiteten ρ = konstant, ur symmetri vet vi att masscentrummet $(x_T, y_T, z_T) = (x_T, 0, 0)$, dvs den ligger på x-axeln.

där

$$x_T = \frac{\int_k x\,dm}{\int_k dm}$$





Volymen $dV = \pi f(x)^2 dx$

Massan $dm = \rho_0 dV = \rho_0 \pi f^2(x) dx$

$$= \frac{\int_0^1 x \cancel{\rho_0 \pi} \left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2 dx}{\int_0^1 \cancel{\rho_0 \pi} \left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2 dx} = \frac{\int_0^1 x \cdot \ln(x+1)\,dx}{\int_0^1 \ln(x+1)}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln(x+1)\,dx}{\int_0^1 (x)' \cdot \ln(x+1)\,dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\,dx}{\left[x \cdot \ln(x+1) - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x+1}\,dx\right.} = \cdots$$

a) Volym $\pi \int_0^1 \left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2 dx \ldots$

④ Är följande konvergenta?

Ⅰ $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ Ⅱ $\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ Ⅲ $\int_0^1 \frac{1}{x^5+x}\,dx$ 0,6p

aⅠ $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ aⅡ $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ aⅢ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Lösning:

aI) konvergent ty $\alpha = 3 > 1$

aII) divergent ty $\alpha = 1$

aIII konvergent ty $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

I) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ dominerade termen är x^3. då $x \to \infty$
Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(1+\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x^3}}_{\to 0}\right)} = 1$$

och $\underline{0 < 1 < \infty}$ Slutsats: $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ konvergent $\Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergent

Men vi vet att $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}$ är konv.

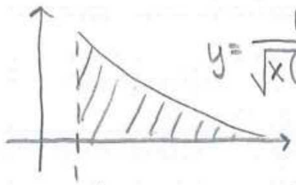
II) $\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ dominerande termen är $\sqrt{x}$ då $x \to 0^+$

Vi kollar $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x^{2,5}+1)} = 1$

$0 < 1 < \infty$

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ konv. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konv. Men vi vet att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konv. ty $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

14.9.



$y = \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}$

Rotationsvolymen runt x-axeln

$$= \pi \int_1^\infty y^2\,dx = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}\right)^2 dx = \pi \lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)} + \frac{B_1x+C_1}{(1+x^2)^2}$$

Föreläsning 2015-11-30

Kapitel 15 15.1 Differentialekvationer av första ordningen

En vanlig ekvation $x^2+x-10=0$ har en okänd variabel x.
En ekvation har en okänd funktion, t.ex. $2y(t)+\sin t = 1$

En diff ekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion o dess derivata.

ex. $(y'')^2 - y = 1$ där $y = y(t)$ ex. $y' = 3$

Linjära diffekvationer av ordning 1. $a(t)\cdot y' + b(t)y = c(t) \Leftarrow$ Lös följande ekvation

I fallet $b(t)=0$ för alla t skriver vi $a(t)y' = c(t) \Leftrightarrow y' = \frac{c(t)}{a(t)}$ $y(t) = \int y'(t)\,dt$

$\uparrow \frac{c(t)}{a(t)}$

I vanligt fall då $b(t) \neq 0$

Lösning: (Hoppas kunna skriva om vänsterledet som derivatan av något uttryck.
I så fall kan vi integrera båda leden för att få bort derivatans tecken.)

Skriv om ekvationen som $y' + \underbrace{\frac{b(t)}{a(t)}}_{g(t)} y = \underbrace{\frac{c(t)}{a(t)}}_{h(t)} \Rightarrow y' + g(t)y = h(t)$

Antag att $G(t)$ är en primitiv till $g(x)$ dvs. $G'(t) = g(t)$
Vi får en integrerande faktor $e^{G(t)}$.

$\therefore\ e^{G(t)}y' + e^{G(t)} \cdot g(x)y = e^{G(t)}h(t)$

$(e^{G(t)} \cdot y)' = e^{G(t)} \cdot h(t) \qquad e^{G(t)}y = \int (e^{G(t)} \cdot y)' dt = \int e^{G(t)} h(t)\, dt$

Lösningarna är $y(t) = e^{-G(t)} \int e^{G(t)} h(t)\, dt$

Dvs. $y(t) = e^{-\int g(t)dt} \int e^{\int g(t)dt} \cdot h(t)\, dt$

Har inget C.

Ex. Lös $\frac{y'}{x} = y + 1 \qquad y = y(x)$

Lösning: $\frac{y'}{x} - y = 1 \Rightarrow \underbrace{y' - xy}_{g(x)} = \underbrace{x}_{h(x)}$

Börja med att räkna ut potens-integralerna.

$\therefore\ y(x) = e^{-\int -x dx} \int e^{\int -x dx} \cdot \underbrace{x}_{h(x)}\, dx =$

$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\, dx = \left[\begin{array}{l} t = -\frac{x^2}{2} \\ dt = -x dx \end{array} \right]$

$= e^{\frac{x^2}{2}} \int -e^{t} dt = e^{\frac{x^2}{2}}(-e^{t} + C)$

$= e^{\frac{x^2}{2}}(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C) = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$ som är lösningen.

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{25} y = 16 \\ y(0) = 2000 \end{cases}$$

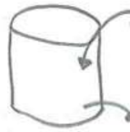
Lösning: Ur diff. ekvationen vet vi $y(t) = e^{-\int \frac{1}{25} dt} \int e^{\int \frac{1}{25} dt} \cdot 16\, dt$

$= e^{-\frac{t}{25}} \left(16 \cdot \frac{e^{\frac{t}{25}}}{\frac{1}{25}} + C \right) = 16 \cdot 25 + Ce^{-\frac{t}{25}}$

Men $y(0) = 2000 \qquad 2000 = y(0) = 400 + Ce^{-\frac{0}{25}} = C = 1600$

Den sökta lösningen är $y(t) = 400 + 1600\, e^{-\frac{t}{25}}$

Ex. En 100 liters tank är fylld med en salt lösning med saltkoncentrationen 30 g/ℓ i början.



Tanken fylls på med en saltlösning med koncentrationen 20 g/ℓ med hastigheten 5 ℓ/min.

Lösningen tappas ut med hastigheten 5 ℓ/min.

Salt pumpas in med hastigheten $20 \cdot 5 = 100$ g/min

$\frac{5}{100}$ av hela saltlösningen tappas ut per minut.

Fråga: Hur lång tid tar det innan saltlösningens koncentration gått ner till 25 g/ℓ ?

Lösning: Antag att det finns $y(t)$ gram salt i tanken vid tiden t minuter.

Då är (a) $y(0)$ = koncentrationen vid $t=0$ · volym $= 30 \cdot 100 = 3000$ g

(b) Om t_1 är den sökta tiden, så är $y(t_1) = 25$ g/ℓ $\cdot 100$ ℓ $= 2500$ g

(c) $y'(t)$ = förändringshastighet av mängden salt i tanken vid tiden t.

= hastighet av mängden salt som kommer in via ① − hastighet av mängden salt som kommer ut vid tiden t via ②

$= 100$ g/min $- \frac{5}{100} y(t)$ g/min

hela salthalten vid tiden t.

$$\therefore \begin{cases} y' = 100 - \frac{1}{20} \cdot y & \dots ① \\ y(0) = 3000 & \dots ② \\ y(t_1) = 2500 & \dots ③ \end{cases}$$

$$① \rightarrow y(t) = e^{-\int \frac{1}{20} dt} \int e^{\int \frac{1}{20} dt} \cdot 100 \, dt$$

$$= e^{-\frac{t}{20}} \int e^{\frac{t}{20}} \cdot 100 \, dt = e^{-\frac{t}{20}} \cdot 100 \left(e^{\frac{t}{20}} \cdot 20 + C \right)$$

$$= 2000 + 100 C e^{-\frac{t}{20}}$$

$② \Rightarrow 3000 = 2000 +$ $\quad C = 10 \quad y(t) = 2000 + 1000 e^{-\frac{t}{20}}$

$③ \Rightarrow t_1 = 20 \ln 2$ (minut)

Föreläsning 2015-12-01

Separabla differentialekvationer

$y' = h(x) \cdot f(y)$ Lös ekvationen $\quad y = y(x)$

Lösning: $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot f(y) \qquad \frac{dy}{f(y)} = h(x) dx$

$\int \frac{dy}{f(y)} = \int h(x) dx$ ☆ som betraktas som lösningar av diff. ekvationen ty ☆ implicit definierar en funktion, som är lösningen.

Ex. Lös $y' = (1+y^2)x$ Lösning: $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)x \iff \frac{dy}{1+y^2} = x dx$

$$\iff \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x \, dx \iff \boxed{\arctan y = \frac{x^2}{2} + C}$$

Ex. Lös $\begin{cases} y' = 2x \cdot y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Lösning: $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y^2$ som ger $y=0$ eller $\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$

som ger $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$

$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{y} = x^2 + C$ Lösningar till $y' = 2xy^2$ är $y=0$ och $-\frac{1}{y} = x^2 + C$

↑ konstant funktion

Men $y(0)=1$ medför att $-\frac{1}{1} = 0^2 + C$ $\quad C = -1$

$-\frac{1}{y} = x^2 - 1$ dvs. $y = \frac{1}{1-x^2}$ är den sökta lösningen.

Ex. En varm soppa kyls ner från 90°C till 60°C efter 10 minuter i ett rum med temperatur 20°C. Hur lång tid tar det för soppan att svalna till 35°C? Antag att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturskillnaden mellan objekt och omgivning.

Lösning: Antag att $y(t)$ är soppans temperatur vid tiden t. (min)

Då är $y'(t) = k$ konstant $y(t) - 20$ $\quad$ 1)

$$\begin{cases} y(0) = 90\,°C & 2) \\ y(10) = 60\,°C & 3) \\ y(t_1) = 35\,°C & 4) \end{cases}$$

1) ger $\frac{dy}{dx} = k(y-20)$ $\quad \frac{dy}{y-20} = k\,dt$ eller $y - 20 = 0$ som inte uppfyller 2)

$\ln|y-20| = kt + C$ $\quad y - 20 = \pm e^C \cdot e^{kt}$ dvs. $y = 20 + C_1 e^{kt}$

$|y-20| = e^{kt} \cdot e^C$

2) ger $90 = 20 + C_1 e^{k0} = 20 + C_1$ $\quad C_1 = 70$

3) ger $60 = 20 + 70e^{k \cdot 10}$ $\Rightarrow e^k = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{10}}$ $\quad \therefore \; y(t) = 20 + 70(e^k)^t = 20 + 70 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{t}{10}}$

4) ger $35 = 20 + 70\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{t_1}{10}}$ $= \left(\frac{15}{70}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^{t_1/10}$

$\ln \frac{15}{70} = \frac{t_1}{10} \cdot \ln \frac{4}{7}$ $\quad t_1 = \frac{10 \ln \frac{3}{14}}{\ln \frac{4}{7}}$

Integralekvationer

Ex. Lös $y(x) = 1 + \int_0^x t \cdot y(t)\,dt$

Lösning: Derivering på x ger $y'(x) = 0 + xy(x)$ $\quad$ Men $y(0) = 1 + \int_0^0 t\,y(t)\,dt = 1$

Så blir problemet $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\because \underbrace{y' - xy}_{g(x)\ h(x)} = 0$ ger $y(x) = e^{-\int -x\,dx} \int e^{\int -x\,dx} \cdot 0\,dx = e^{\frac{x^2}{2}}(0+c)$

Men $1 = y(0) = e^{\frac{0^2}{2}} \cdot c \Rightarrow c = 1$ $\quad y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ är lösningen

15,2 Linjära diff ekvationer av andra ordningen

$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = h(x)$ där $a(x)$, $b(x)$ och $h(x)$ är givna funktioner.

Inhomogena diffekvationer $y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$ $\quad$ 1)

Homogen diffekvation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ $\quad$ 2)

OBS. En allmän lösning till diffekvationen är ett uttryck som ger alla lösningar av diffekv.

Sats. Antag att $y_p(x)$ är en partikulärlösning till 1) och $y_h(x)$ är en allmän lösning till 2).

$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ är en allmän lösning till 1).

Bevis: ① Ska visa att $y_p(x) + y_h(x)$ är en lösning till 1)

$(y_p + y_h)'' + a(x)(y_p + y_h)' + b(x)(y_p + y_h) =$

$y_p'' + a(x)y_p' + b(x)y + y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h = h(x) + 0 = h(x)$

2) Varje lösning $y(x)$ av 1) kan uttryckas som $y_p + y_h$

$(y - y_p)'' + a(x)(y - y_p)' + b(x)(y - y_p) = y'' + a(x)y' + b(x)y - (y_p'' + a(x)y' + b(x)y)$

$= h(x)$

$y - y_p$ är lösningen av 2). $\quad$ dvs. $y - y_p = y_h$ $\quad$ dvs. $y = y_p + y_h$

Hur hittar man $y_h(x)$ till ekvationen $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Vi studerar diff ekv. $y'' + ay' + by = 0$ då a o b är konstanta.

Sats. Karakteristiska ekvationer $r^2 + ar + b = 0$ har två rötter r_1 o r_2.

1) Om $r_1 \neq r_2$ och de är reella tal så är $y_h(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

2) Om $r_1 = r_2$ och de är reella tal så är $y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$

3) Om $r_1 = \alpha + i\beta$ o $r_2 = \alpha - i\beta$ så är $y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$