Seminarium 1 LV 2 2015-11-13

6,13 Lös $\begin{cases} |z-3i| = 2 \\ z+\bar{z} = 2 \end{cases}$

Lösning: Skriv $z = x+yi$ Då är $|x+yi-3i| = 2$

$(x+yi)+(x-yi) = 2$

dvs. $\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ som ger $1^2+(y-3)^2 = 4 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{3}$

$\therefore z = x+yi = 1+(3\pm\sqrt{3})i$

Kan även lösas geometriskt

6,30. Uttryck $\sin^4\theta$ med hjälp av $\cos k\theta$, där $k = 1,2,3,4$

Lösning: $\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^4}{16}$

$$= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{(e^{i\theta})^4}_{①} + \underbrace{4(e^{i\theta})^3(-e^{-i\theta})^1}_{②} + \underbrace{6(e^{i\theta})^2(-e^{-i\theta})^2}_{③} + \underbrace{4(e^{i\theta})^1(-e^{-i\theta})^3}_{④} + \underbrace{(-e^{-i\theta})^4}_{⑤}\Big)$$

$$= \frac{1}{16}\Big(\underbrace{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}_{①+⑤} - \underbrace{4e^{2i\theta}-4e^{-2i\theta}}_{②\quad ④} + \underbrace{6}_{③}$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4\theta - 4\cdot 2\cos 2\theta + 6)$$

Kom ihåg!

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Eulers formel} \\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{array}}$$

6,39. Lös $z^2+2iz-1+2i = 0$

$z^2+2iz+i^2+2i = 0$

$(z+i)^2 = -2i$

$z+i = \pm\sqrt{-2i}$

$z = -i \pm \sqrt{-2i}$

Låt $\sqrt{-2i} = x+yi$. Då är $(x+yi)^2 = -2i$

$$\begin{cases} ① \; x^2+y^2 = 2 \\ ② \; x^2-y^2 = 0 \\ ③ \; 2xy = -2 \end{cases}$$

Vi får följande ekvationssystem.

$① + ② = x^2+\cancel{y^2}+x^2-\cancel{y^2} = 2+0$

$2x^2 = 2$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Insättning i ③

$y_1 = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$

$y_2 = \frac{2}{2\cdot(-1)} = -1$

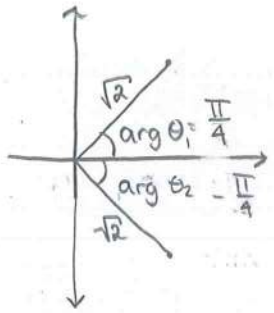
$z = -i \pm (1-i)$

$$\begin{cases} z_1 = -i+1-i = 1-2i \\ z_2 = \cancel{-i}-1\cancel{-i} = -1 \end{cases}$$

Tentauppgift

1b. Förenkla $(1+i)^{20} - (1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} + \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{20}$

Lösning:



$$= 2^{10} e^{i5\pi} + 2^{10} e^{-i5\pi}$$

$$= 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi - \cos(-5\pi) - i\sin(-5\pi))$$

$$= 0$$

2c Lös $z^{16} - z^8 + 1 = 0$ lösningar anges på polär form. 0,4p

Lösning $(z^8)^2 - z^8 + 1 = 0$ $\quad w = z^8$ så är $w^2 - w + 1 = 0$

$$w^2 - w + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \qquad \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \qquad w - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i$$

För $w = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Löser vi $z^8 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad z_k = 1^{\frac{1}{8}} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{8}\right)}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

För $w = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad z^8 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad z^8 = e^{i\,-\frac{\pi}{3}}$

$$z_k = 1^{\frac{1}{8}} e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{8}\right)} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Tentauppgift 0,3p/st

① $$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

② $$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x\, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{bmatrix}$$

$$= -\int (1 - t^2)t^2\, dt = -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

③ 0,4p $$\int e^{\sqrt{x}}\, dx \overset{t = \sqrt{x}}{\underset{\substack{x = t^2 \\ dx = 2t\,dt}}{=}} \int e^t \cdot 2t\,dt = \int (e^t)'\, 2t\,dt = e^t \cdot 2t - \int e^t (2t)'\, dt$$

$$= 2e^t t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

④ 0,4p

$$\int \arctan x\,dx = \int (x)'\arctan x\,dx = \int x\arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\left[\begin{matrix} t=x^2+1 \\ dt=2x\,dx \end{matrix}\right] = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

⑤ 0,4p

$$\int\frac{3x+1}{x^2+9}dx = 3\int\frac{x}{x^2+9} + \int\frac{1}{x^2+9} \underset{dt=2x\,dx}{\overset{t=x^2+9}{=}} \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t} + \frac{1}{9}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx$$

$$\underset{ds=\frac{1}{3}dx}{\overset{s=\frac{x}{3}}{=}} \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{3}\int\frac{ds}{s^2+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

⑥ 0,2p

$$\int\frac{x}{1+x^4}dx = \left[\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$$

⑦ 0,3p

$$\int\frac{\sin^3\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx = \left[\begin{matrix} t=x+1 \\ dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \end{matrix}\right] = 2\int\sin^3 t\,dt$$

$$= 2\int(1-\cos^2 t)\sin t\,dt\,dt \underset{ds=-\sin t\,dt}{\overset{s=\cos t}{=}} -2\int(1-s^2)\,ds$$

$$= -2s + \frac{2s^3}{3} + C = -2\cos\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}\cos^3\sqrt{x+1} + C$$

Missad föreläsning Primitiva funktioner

12,1 def: $F(x)$ kallas primitiv funktion till $f(x)$ i ett intervall I om

$F'(x) = f(x)$ i I. Isåfall skriver vi $\int f(x)dx = F(x) + C$

$\therefore \int f(x)dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$

ex. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, $\left[\text{ty } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2\right]$ och $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + 1 + C$, $\left[\text{ty } \left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2\right]$

Sats 2,1 Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så kan alla övriga primitiva funktioner till $f(x)$ uttryckas som $F(x)+C$

Bevis: $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) \Rightarrow f'(x) = f(x)$. Antag att $h(x)$ också är en primitiv till $f(x)$, då är $h'(x) = f(x)$ $F(x) = h'(x)$

dvs. $h(x) = F(x) + C$ $(F(x) - h(x))' = 0$ för alla x som ger $f(x) - h(x) = 0$

12,2-12,3 a) $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int A(x)dx = A\int f(x)dx$ för alla konstanter A

c) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

d) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

Ex. $\int (x^2 - 2x + 7)\,dx = \int x^2 dx - 2\int x\,dx + \int 7\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 7x + C$

Sats 12,2 KOM IHÅG!

① $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ för alla $\alpha \neq 1$

② $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

③ $\int e^x dx = e^x + C$

④ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑥ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

⑧ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{atan} x + C$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{asin} x + C$

Bevis av 6

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

Sats. (Substitution)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ t' = g'(x) \end{bmatrix} \int f(t)\,dt \quad \text{dvs. } dt = g'(x)\,dx$$

Ex. $\int \cos 2x\,dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt/dx = (2x)' \\ \frac{dt}{2} = dx \end{bmatrix} = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C$

$\frac{1}{2} \cdot \sin 2x + C$

Ex. 12,6. $\int 2xe^{x^2} dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C$

Ex. $\int 2^{3x} dx = \int e^{3x\ln 2} dx = \begin{bmatrix} t = 3\ln 2 \cdot x \\ dt = 3\ln 2\,dx \end{bmatrix} \int e^t \frac{dt}{3\ln 2} = \frac{1}{3\ln 2}\int e^t dt$

$= \frac{1}{3\ln 2} e^t + C = \frac{1}{3\ln 2} e^{3x \cdot \ln 2} + C = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C$

Allmänt: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Ex. $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{bmatrix} - \int \frac{1}{t} dt$

$= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C$

Allmänt: $\int f(\cos x) \cdot \sin x \, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \end{bmatrix} - \int f(t) \, dt$

Ex. $\int \frac{1}{x^2+2} dx = \int \frac{1}{2(\frac{x^2}{2}+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} dx \begin{bmatrix} t = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}} dx \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} \sqrt{2} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C$

$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C}$

alt. $\int \frac{1}{x^2+2} dx = \begin{bmatrix} x = \sqrt{2} t \\ dx = (\sqrt{2} t)^2 dt \\ = \sqrt{2} \, dt \end{bmatrix} \int \frac{1}{(\sqrt{2} t)^2 + 2} \sqrt{2} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

Ex. $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} dx$

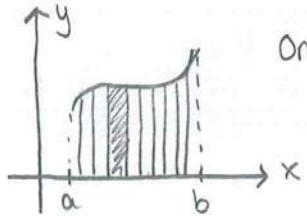
$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C$

Föreläsning 6 2015-11-16 Lv 3

Kap 13 13,1 – 13,3 Definition av integraler

Vi kan enkelt beräkna areorna för vanliga figurer ex. cirkel, kvadrat, etc.

Problem: Hur beräknar man arean till området?

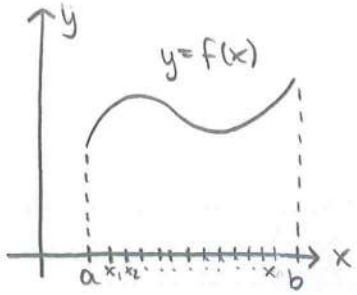


Området begränsas av kurvorna $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ och x-axeln.

<u>Idé</u> Använd summan av areorna till små rektanglar för att approximera det totala arean av området.

Definition av integraler $\int_a^b f(x) dx$

Antag att $f(x)$ är begränsad i $[a, b]$ och $[a, b]$ är begränsad.



Vi gör indelning av $[a, b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$

Vi väljer en godtycklig punkt c_j i varje delintervall $[x_{j-1}, x_j]$

Vi får en Riemannsumma $\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$ $\boxed{\text{där } \Delta x_j = x_j - x_{j-1}}$

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$

om gränsvärdet existerar ändligt och oberoende av indelningar och val av c_j

Sats 13,3* Varje kontinuerlig funktion är integrerbar i varje <u>slutet</u> intervall $[a, b]$

Ex. $f(x) = \underbrace{e^{\cos\sqrt{x^2+1}}}_{\text{kontinuerlig}}$ är integrerbar i $\overbrace{[0, 10]}^{\text{begränsad}}$

$$\int_a^b e^{\cos\sqrt{x^2+1}}dx \quad \text{existerar}$$

Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$ i $]0, 1[$ Man kan se att funktionen inte är integrerbar. Den är obegränsad i intervallet $]0, 1[$. Men $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i $]0, 1[$

13,4. Räknelagar

Sats 4 Följande gäller:

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_b^a f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

④ $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

⑤ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

⑥ Om $f(x) \leq g(x)$ i $[a, b]$ så är $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ OBS! $b \geq a$

⑦ Om $b \geq a$ så är

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Bevis av 7

$f(x) \leq |f(x)|$ för $a \leq x \leq b$

Enligt 6 vet vi $\int_a^b \pm f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

som ger $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Ex. $\int_0^1 5\,dx = 5\cdot 1 = 5$ a.e.

Ex. För $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \le 2 \\ 3 & 2 < x \le 3 \end{cases}$ gäller $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 3\,dx$

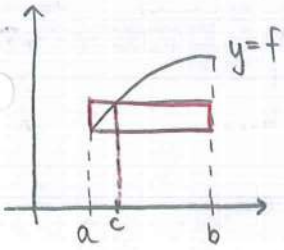
$= 1(1-0) + 2(2-1) + 3(3-2) = 6$

Ex. Visa $1 \le \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \le \frac{3}{2}$

Bevis: $\underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{4}}}_{=\frac{1}{3}} \le \frac{1}{1+\sqrt{x}} \le \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1}}}_{=\frac{1}{2}}$ Enligt 6 vet vi $\underbrace{\int_1^4 \frac{1}{3}\,dx}_{=1} \le \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \le \underbrace{\int_1^4 \frac{1}{2}\,dx}_{=\frac{3}{2}}$

13,5. Sats 13,5 Integralkalkylens medelvärdessats

Om $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ så gäller $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ för någon $a \le c \le b$



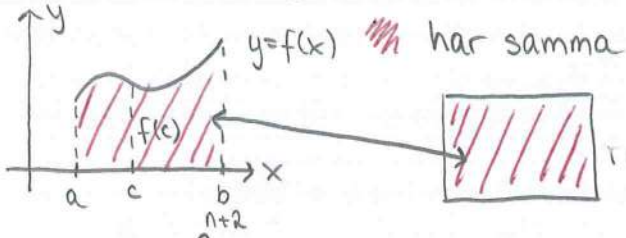
Välj $c \in [a,b]$ så att rektangelns area $= \int_a^b f(x)\,dx$

Föreläsning 7 2015-11-17

Sats 13,5 Fortsättning

$f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Geometrisk tolkning för ngt. $a \le c \le b$



har samma area som rektangeln.

Ex. $A = \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+2} \arctan x\,dx$

Lösning: $\int_n^{n+2} \arctan x\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{Integralkalkylens medel-} \\ \text{enligt sats 13,5} \quad \text{värdessats} \\ \text{för } n \le c_n \le n+2\end{array}\right]$

$= \arctan(c_n)\cdot(n+2-n) = 2\arctan(c_n)$

dvs. $2\arctan c_n \to \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}}$ då $n\to\infty$

ty $c_n \to \infty$ då $n \to \infty$

Gränsvärdet blir π då $n\to\infty$

Svar: $A = \pi$

13,6. Analysens huvudsats

Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i ett öppet intervall I och att $a \in I$

Så gäller,
$$S'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x \overset{\text{dvs.}}{=} \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{för alla } x \in I$$

<u>Bevis:</u>
För varje $x \in I$ har vi:
$$\frac{\boxed{S(h+x)} - \boxed{S(x)}}{h} = \frac{\boxed{\int_a^{x+h} f(t)\,dt} - \boxed{\int_a^x f(t)\,dt}}{h}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \left[\begin{array}{l}\text{enligt 13,5 för}\\ \text{ngt } x \le c \le x+h\end{array}\right] = \frac{f(c_n)\cdot h}{h} \xrightarrow{\text{då } h\to 0} f(x)$$

ty $h \to 0 \Rightarrow c_n \to x$ och f är kontinuerlig i punkten x.

$\therefore\ S'(x) = f(x)$ för $x \in I$

Ex. 13,4 $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-(t^2)}\,dt = e^{-(x^2)}$

Ex. 13,5 $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-(t^2)}\,dt = \Big[\ s = \sqrt{x}$

$$= \frac{d}{ds}\int_0^s e^{-(t^2)}\,dt\,\frac{ds}{dx} = e^{-(s^2)}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Allmänt gäller $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

$$= f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

Ex. $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x^3} \sin(t^2)\,dt = \sin(3x^3)^2\cdot\overset{9x^2}{(3x^3)'} - \sin(2x)^2\cdot\overset{2}{(2x)'} = \sin 9x^6\cdot 9x^2 - \sin 4x^2\cdot 2$

Sats 13,7 Insättningsformel

Om en kontinuerlig funktion $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$ i ett öppet intervall dvs. $F'(x) = f(x)$ i I, så är
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$
för alla $[a,b] \subset I$

Satsen säger att $\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$

<u>Bevis</u> Analysens huvudsats ger
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt - F(x)\right) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{för alla } x \in I$$

$\therefore\ \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = A$ ← konstant i I

dvs. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + A$ i I

Speciellt för $x = a$ gäller $\displaystyle 0 = \int_a^a f(t)\,dt$
$$= F(a) + A \Rightarrow A = -F(a)$$

För $x=b$ gäller $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Ex. $\int_1^2 \frac{x+1}{x+2}\,dx = \int_1^2 \frac{(x+2)-1}{x+2} = \int_1^2 \left(1 + \frac{-1}{x+2}\right)dx = \Big[x - \ln|x+2|\Big]_1^2$

$= 2 - \ln 4 - 1 + \ln 3 = 1 + \ln\frac{3}{4}$

Sats ① $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$

② $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx \overset{t=g(x)}{\underset{dt=g'(x)dx}{=}} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

Ex. 13,9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin x)'\,dx = \Big[x\cdot\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\sin x\,dx$

$= \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

Ex. $\int_2^3 x^3 e^{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int_4^9 t e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_4^9 t\,(e^t)'\,dt = \frac{1}{2}\left(\Big[te^t\Big]_4^9 - \int_4^9 (t)'e^t\,dt\right)$

OBS! Nya integrationsgränser då vi gör variabelbyte!

$= \frac{1}{2}(9e^9 - 4e^4 - e^9 + e^4 = \frac{1}{2}(8e^9 - 3e^4)$

Ex. $\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x+1} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx \end{bmatrix} = \int_1^3 \cos t \cdot 2\,dt = 2\int_1^3 \cos t\,dt$

$= 2\Big[-\sin t\Big]_1^3 = 2\sin 3 - 2\sin 1$

Ex. $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^8 x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\cos^8 x \cdot \sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix}$

$= -\int_1^{-1} (1-t^2)\,t^8\,dt = \int_{-1}^{1} t^8 - t^{10}\,dt = \left[\frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{-1}{9} - \frac{-1}{11}\right)$

$= \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$

$= \frac{2}{9} - \frac{2}{11}$