Funktionsteori sammanfattning

Martin Sundeqvist

October 2014

1 Komplexa funktioner

Definition 1.1 Gränsvärde, komplexvärd funktion

Anta att f är en komplexvärd funktion som är definierad på någon omgivning av punkten $z = a$ (utom möjligen i punkten $z = a$ själv). Vi säger att $f(z)$ har gränsvärdet L då z går mot a, eller

$$\lim_{z\to a} f(z) = L$$

om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(z) - L| < \epsilon$$

för alla z med $0 < |z - a| < \delta$. Ett annat vanligt skrivsätt är "$f(z) \to L$, då $z \to a$".

Sats 1.5 Räkneregler för gränsvärden

Anta att $\lim_{z\to a} f(z) = L$ och att $\lim_{z\to a} g(z) = M$. Då är

1. $\lim_{z\to a}(f(z) + g(z)) = L + M$.
2. $\lim_{z\to a}(f(z) - g(z)) = L - M$.
3. $\lim_{z\to a}(f(z)g(z)) = LM$.
4. $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$(förutsatt att $M \neq 0$).
5. $\lim_{z\to a} f(z) = 0 \leftrightarrow \lim_{z\to a} |f(z)| = 0$.
6. Om $a = \alpha + i\beta$, $L = A + iB$ och $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, så

$$\lim_{z\to a} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(\alpha\ \beta)} u(x, y) = A \\ \lim_{(x,y)\to(\alpha\ \beta)} v(x, y) = B \end{cases}$$

Definition 1.6 Kontinuitet

Anta att f är definierad på en omgivning av punkten $z = a$. Vi säger att f är kontinuerlig i punkten $z = a$ om

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$$

Om f är definierad på mängden D och f är kontinuerlig i varje punkt $a \in D$, så säger vi att f är kontinuerlig på mängden D, eller om definitionsmängden är underförstådd, att f är kontinuerlig.

Definition 1.9 Komplex deriverbarhet

Anta att funktionen f är definierad på en omgivning av $z = a$. Vi säger att f är (komplext) deriverbar i punkten $z = a$ om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Om gränsvärdet existerar, kallas detta derivatan av f i punkten $z = a$ och betecknas vanligen $f'(a)$. Observera att h:et i gränsvärdet är ett komplext tal.

Definition 1.10 Holomorfism

Om f är definierad på ett område $D \sqsubset \mathbb{C}$, och $f'(z)$ existerar för varje $z \epsilon D$, så säger vi att f är holomorf (på D).

Sats 1.13 Cauchy-Riemanns ekvationer

Anta att $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Låt $a = \alpha + i\beta$ och antag att $f'(a)$ existerar. Då är

$$\begin{cases} u'_x(\alpha, \beta) = v'_y(\alpha, \beta) \\ u'_y(\alpha, \beta) = -v'_x(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Sats 1.15 Cauchy-Riemanns ekvationer, deriverbarhet

Anta att $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ och att u och v är differentierbara i punkten $a = \alpha + i\beta$. Om Cauchy-Riemanns ekvationer

$$\begin{cases} u'_x(\alpha, \beta) = v'_y(\alpha, \beta) \\ u'_y(\alpha, \beta) = -v'_x(\alpha, \beta) \end{cases}$$

är uppfyllda i punkten a, så existerar derivatan $f'(a)$

> Sammanfattningsvis, en funktion $f = u + iv$ (där u och v är differentierbara funktioner) är holomorf på ett område D om och endast om Cauchy-Riemanns ekvationer
>
> $$\begin{cases} u'_x(\alpha, \beta) = v'_y(\alpha, \beta) \\ u'_y(\alpha, \beta) = -v'_x(\alpha, \beta) \end{cases}$$
>
> är uppfyllda på D.

Definition 1.18 Harmonisk funktion

Anta att u är en C^2-funktion, dvs. att u och alla dess första och andra ordningens partiella derivator existerar och är kontinuerliga. Om

$$\triangle u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

så kallas u harmonisk. $\triangle u$ kallas Laplaceoperatorn.

Sats 1.19 Holomorfism, harmoni

Anta att $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ är en holomorf funktion. Då är u och v harmoniska.

2 Elementära funktioner

Sats 2.1 Divisionsalgoritmen för komplexa polynom

Anta att p och q är två komplexa polynom (och q inte är nollpolynomet) . Då finns entydigt bestämda polynom k och r, där $\deg r < \deg q$ och

$$p(z) = k(z)q(z) + r(z) \Leftrightarrow \frac{p(z)}{q(z)} = k(z) + \frac{r(z)}{q(z)}.$$

Polynomen $k(z)$ och $r(z)$ kallas vanligen kvoten respektive resten vid divisionen $\frac{p(z)}{q(z)}$.

Sats 2.2 Faktorsatsen

Anta att p är ett polynom (som inte är nollpolynomet). Då är $z = \alpha$ ett nollställe till p om och endast om p kan faktoriseras

$$p(z) = (z - \alpha)q(z)$$

där q är ett polynom med $\deg q = \deg p - 1$

Sats 2.3 Algebrans fundamentalsats

Om p är ett polynom med $\deg p \geq 1$ (dvs. p är inte konstant), så finns det minst ett $\alpha \in \mathbb{C}$ som uppfyller att

$$p(\alpha) = 0.$$

Holomorfism och polynom

Ur räknereglerna för derivator följer att varje polynom
$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$

är en holomorf funktion, med derivatan
$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \ldots + na_nz^{n-1}$

Sats 2.7 Polynomets högstagradsterm och stora värden på $|z|$

Låt $p(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$ vara ett komplext polynom. Då finns det ett tal $\rho > 0$ sådant att för alla z med $|z| > \rho$ gäller att

$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq p(z) \leq 2|a_n||z|^n$

Sats 2.9 Storlek på rationella funktion för stora $|z|$

Anta att

$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0}{b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1z + b_0}$

är en rationell funktion med $\deg p = n$ och $\deg q = m$. Då finns ett tal $\rho > 0$ sådant att

$\frac{1}{4} \cdot \left|\frac{a_n}{bm}\right| \cdot \left|z\right|^{n-m} \leq \left|R(z)\right| \leq 4 \cdot \left|\frac{a_n}{bm}\right| \cdot \left|z\right|^{n-m}$

för alla z med $|z| > \rho$

Sats 2.10 Holomorfism exponentiell funktion

Funktion $f(z) = e^z$ är holomorf på hela $\mathbb{C}$ och $f' = e^z$

Komplexa logaritmer till z betecknas $\log z$ och skrivs

$\log z = \ln|z| + i \arg z$

Den komplexa logaritmen är inte entydigt bestämt, man får själv välja definitionsmängden genom att inskränka de värden $\arg z$ kan anta. Till exempel kan man sätta att $-\pi < \arg z < \pi$, vilken är principalgrenen av $\arg z$, som ju betecknar alla möjliga värden argumentet av z kan anta.

Sats 2.14 Holomorfism logaritm

Om L(z) betecknar en specifik gren av den komplexa logaritmen, så är L holomorf och $L' = \frac{1}{z}$. I synnerhet gäller alltså

$\frac{d}{dz}(Logz) = \frac{1}{z}$

Definition 2.15
Låt z och α vara komplexa tal. Vi definierar z^α som

$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$

3 Komplex integralkalkyl

Definition 3.1 Kurvintegral

Låt γ vara en slät kurva med parametrisering $z(t), \alpha \leq t \leq \beta$ Om f är en kontinuerlig funktion på γ, så definierar vi kurvintegral av f längs γ som

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

Om kurvan bara är styckvis slät, säg $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \gamma_n$ där varje γ_j är en slät kurva, så definierar vi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

Definition 3.6 Kurvintegral av f längs γ med avseende på båglängden

Låt γ vara en slät kurva med parametrisering $z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Om f är en kontinuerlig funktion på γ, så definierar vi kurvintegralen av f längs γ med avseende på båglängden som

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_\alpha^\beta f(z(t))|z'|dt$$

Sats 3.7 ML-olikheten

Om γ är en (styckvis) slät kurva och f en kontinuerlig funktion på γ som uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \gamma$, så gäller

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M\iota(\gamma),$$

där $\iota(\gamma)$ är längden av γ

Definition 3.9 Primitiva funktioner

Anta att f är en komplexvärd funktion definierad på ett område $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$. Om F uppfyller att $F' = f$ på Ω, så kallas F en primitiv funktion till f(på Ω)

Sats 3.11 Kurvintegral beräkning i $\mathbb{C}$

Anta att Ω är ett område i $\mathbb{C}$ och att f är en holomorf funktion på Ω som har en primitiv funktion F. Om γ är en slät kurva i Ω med startpunkt a och slutpunkt b så är

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$$

I synnerhet, om γ är sluten, så är $a = b$ och

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Sats 3.15 Cauchys Integralsats

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ vars rand $\gamma = \delta\Omega$ är en enkel, styckvis slät, sluten kurva. Anta att f är holomorf på en omgivning av Ω Då är

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Korollarium 3.18 till Cauchys Integralsats, Enkelt sammanhängande mängd

Anta att $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$ är enkelt sammanhängande och att γ är en enkel, styckvis, slät, positivt orienterad, sluten kurva i Ω. Då gäller att

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

för varje funktion f som är holomorf på Ω.

Sats 3.19 Primitiv, Cauchy

Låt $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$ vara ett område och anta att f är en kontinuerlig funktion på Ω. Om

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

för alla slutna (enkla, styckvis släta och positivt orienterade) kurvor γ som ligger i Ω, så har f en primitiv funktion, dvs. det existerar en holomorf funktion F på Ω med $F' = f$.

I synnerhet: Om Ω är enkelt sammanhängande och f är holomorf på Ω, så har f en primitiv funktion.

Korollarium 3.20 till Cauchys integralsats, Två kurvor med samma start och slutpunkt

Anta att γ och $\widetilde{\gamma}$ är två styckvis släta kurvor med samma start- och slutpunkter. Om man kan deformera γ till $\tilde{}\gamma$ utan att passera några singulariteter för f, dvs. om f är holomorf på det område som begränsas av $\gamma - \widetilde{\gamma}$ så är

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Korollarium 3.21 till Cauchys integralsats, Två styckvis släta, slutna kurvor

Anta att γ och $\widetilde{\gamma}$ är två styckvis släta, slutna kurvor. Om man kan deformera γ till $\widetilde{\gamma}$ utan att passera några singulariteter för f, dvs. om f är holomorf på det område som begränsas av γ och $\widetilde{\gamma}$, så är

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Sats 3.22 Existensen av harmoniska konjugat

Anta att $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$ är ett enkelt sammanhängande område och att u är en (C^2) harmonisk funktion på Ω. Då finns det en annan harmonisk funktion v på Ω sådan att $f = u + iv$ blir holomorf, dvs. v är ett harmoniskt konjugat till u. I själva verket är v endtydigt bestämd, så när som på en additiv konstant.

Sats 3.24 Cauchys Integralformel

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ vars rand $\gamma = \delta\Omega$ är en positivt orienterad, enkelt styckvis slät, sluten kurva. Anta att f är holomorf på en omgivning av Ω och låt $p \in \Omega$. Då är

$$f(p) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-p} dz$$

Sats 3.30 Cauchys Integralformel för f'

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ vars rand $\gamma = \delta\Omega$ är en positivt orienterad, enkel, styckvis slät, sluten kurva. Anta att f är holomorf på en omgivning av Ω och låt $p \in \Omega$. Då är

$$f' = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}$$

Sats 3.31 Holomorfism på område

Om f är holomorf på Ω, så är f' holomorf på Ω.

Sats 3.32 Moreras sats

Om f är kontinuerlig på $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$ och

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

för alla slutna kurvor γ i Ω, så är f holomorf på Ω

Sats 3.34 Liouvilles sats

Anta att f är holomorf på hela $\mathbb{C}$ och att f är begränsad. Då måste f var konstant.

Sats 3.35 Algebrans fundamentalsats

Om $p(z)$ är ett polynom av grad d, $d \geq 1$, så har p minst ett (komplext) nollställe.

Sats 3.36 Picards lilla sats

Anta att f är en icke-konstant funktion som är holomorf på hela $\mathbb{C}$. Då går ekvationen $f(z) = a$ att lösa för alla $a \in \mathbb{C}$ utom möjligen ett undantag.

4 Talföljder och Rekursionsekvationer

Definition 4.1 Talföljdens gränsvärde

Vi säger att följden (a_n) har gränsvärdet A (då $n \to \infty$) om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett tal N, som får bero av ϵ, sådant att

$$|a_n - A| < \epsilon$$

för alla $n \geq N$. Detta skrivs $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, eller ibland som $a_n \to A$ då $n \to \infty$.

Definition 4.4 Supremumbegreppet

Låt $M \sqsubset \mathbb{R}$. Om M är uppåt begränsad, så definierar vi supremum av M, eller minsta övre begränsningen till M genom

$$\sup M = \{ \text{ det minsta tal x sådant att } x \geq a \text{ för alla} a \in M\}$$

Om a inte är uppåt begränsad, så säger vi att $\sup M = \infty$

Sats 4.6 Begränsad talföljd, gränsvärde

En växande, uppåt begränsad talföljd har ett gränsvärde. På motsvarande sätt har en avtagande, nedåt begränsad talföljd ett gränsvärde.

Sats 4.14 Allmän lösning, homogen ekvation av andra ordningen

Den allmänna lösningen till en homogen andra ordningens rekursionsekvation med konstant koefficienter,

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$$

ges av:

1. $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ om den karateristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har två olika lösningar $r_1 \neq r_2$
2. $x_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ om den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot $r = r_1$

Ansatser för högerled av linjära inhomogena ekvationer

Högerled	Naturlig ansats	Undantag
c_n = konstant	x_n^p = konstant	$r = 1$
c_n = polynom av grad d	x_n^p = polynom av grad d	$r = 1$
c_n = konstant $\cdot k^n$	x_n^p = konstant $\cdot k^n$	$r = k$
c_n = polynom av grad d $\cdot k^n$	x_n^p =polynom av grad d $\cdot k^n$	$r = k$

Tabell 1: Ansatser för linjära inhomogena ekvationer. Om ansatsen blir en lösning till den homogena ekvationen kommer ansatsen inte fungera. Man får då multiplicera in n i naturliga ansatsen. Om lösningen till inhomogena ekvationen är en dubbelrot får man multiplicera in n^2 osv.

5 Serier

Definition 5.2 (serie, konvergens,divergens)
Låt (a_k) vara en talföljd. Vi säger att serien:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergerar om gränsvärdet av partialsummorna

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k$$

existerar. Om serien är konvergent, så kallas

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N$$

för värdet av serien, eller helt enkelt seriens summa. Man skriver

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Serier som inte är konvergenta kallas divergenta. Serien är alltså konvergent om ett tal, s finns sådant att $s = \lim_{N\to\infty} s_N$. OBS! Oegentliga gränsvärden (∞) är ej tillåtna. Uttrycket:

$$r_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

kallas seriens restterm. Om serien är konvergent, så gäller att:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = s_N + r_N$$

Serien är konvergent om och endast om $\lim_{N\to\infty} r_N = 0$

Sats 5.3 (Geometriska seriers konvergens)

Den geometriska serien konvergerar om och endast om $|r| < 1$, då seriens summa blir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Cr^k = \frac{C}{1-r}$$

Med andra ord blir summan av geometrisk serie (om $|kvoten| < 1$):

$\frac{\text{Första termen}}{\text{1-kvoten}}$

Sats 5.8 (gränsvärde av summatermer och konvergens)

Om $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$, så divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Minnesregel,konvergenta och divergenta summor, addition

$K + K = K$
$K + D = D$
$D + D = ?$
där K betecknar en konvergent serie och D en divergent serie.

Sats 5.11 (Jämförelsetestet för positiva serier)

Anta att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är positiva serier och att termerna i den första serien är mindre än termerna i den andra serien, dvs. att:

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

för alla k. Då gäller:

1. Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent, så är också $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
2. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent, så är också $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

Med andra ord:
Större serien konvergent = Mindre serien konvergent.
Mindre serien divergent = Större serien divergent.

Sats 5.13(Jämförelsetestet på gränsvärdesform)

Anta att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är positiva serier och att gränsvärdet:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

existerar. (Här kan vi även tillåta att gränsvärdet är oegentligt, dvs. att $L = +\infty$)

1. Om $L < +\infty$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent, så är även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
2. Om $L > 0$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent så är också $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

I fallet $0 < L < +\infty$ ser vi alltså att de två serierna antingen bägge är konvergenta, eller att bägge är divergenta.

Sats 15.15 (Integraluppskattning av partialsumma)

Anta att $a_k = f(k)$, där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en positiv, kontinuerlig, avtagande funktion. Då gäller

$$\int_{n+1}^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \int_{n}^{m} f(x)dx$$

Sats 5.16 (Integraltestet)

Anta att $a_k = f(k)$, där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en positiv, kontinuerlig, avtagande funktion. Då är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent om och endast om den generaliserade integralen

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

är konvergent. Den undre gränsen i integralen är inte viktig och kan vid behov bytas ut mot något annat fixt tal som passar bättre.

Sats 5.17 (Konvergens av p-serier)

Låt p vara en reel konstant. Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

är konvergent om $p > 1$ och divergent om $p \leq 1$.

Definition 5.20 (Absolutkonvergens)

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kallas absolutkonvergent om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent. (Här tillåter vi att $a_k \in \mathbb{C}$)

Sats 5.21 (Konvergens, absolutkonvergens)

Varje absolutkonvergent serie är konvergent.

Sats 5.23(Rottestet)

Anta att gränsvärdet

$$\rho = \lim_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

existerar.

1. Om $\rho < 1$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent
2. Om $\rho > 1$, så divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

I fallet $\rho = 1$ ger testet ingen information.

Sats 5.24(Kvottestet)

Anta att gränsvärdet

$$\kappa = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existerar.

1. Om $\kappa < 1$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent.
2. Om $\kappa > 1$, så divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

I fallet $\kappa = 1$ ger testet ingen information.

Definition 5.27(övre och undre gränsvärde)

Anta att a_k är en reel talföljd. Vi definierar limes superior, eller övre gränsvärdet av följden,

$$\limsup_{k\to\infty} a_k,$$

som det största (egentligen supremum av) alla tal som går att få som gränsvärdet av en delföljd till den ursprungliga talföljden (a_k). På motsvarande sätt definierar vi limes inferior eller undre gränsvärdet av följden,

$$\liminf_{k\to\infty} a_k,$$

som det minsta (egentlig infimum av) alla tal som går att få som gränsvärdet av en delföljd till den ursprungliga talföljden (a_k)

Sats 5.29 (Rottestet, version 2)

Anta att $a_k \geq 0$ och låt

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}.$$

1. Om $\rho < 1$, så är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent.
2. Om $\rho > 1$ så divergerar serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

I fallet $\rho = 1$, ger inte detta test någon information.

Definition 5.30 (Betingad konvergens)

Serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kallas betingat konvergent om den är konvergent, men inte absolutkonvergent.

Sats 5.31 (Leibniz test för alternerande serier)

Anta att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en alternerande serie som dessutom uppfyller att

1. $|a_k|$ är avtagande
2. $a_k \to 0$ då $k \to \infty$

Då är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

6 Funktionsföljder och funktionsserier

Definition 6.1 Funktionsföljd

En funktionsföljd är en följd av funktioner $f_1, f_2, ...$ där definitionsmängden är densamma för alla f_k

Definition 6.2 Punktvis konvergens

En funktionsföljd f_n där funktionerna f_n är definierade på mängden D kallas punktvis konvergent (på) D om för varje $p \in D$ talföljden $(f_n(p))$är konvergent.

Om funktionsföljden är punktvis konvergent, så får man en gränsfunktion f, även denna definierad på samma mängd D genom

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Ofta skrivs detta mer kortfattat som $f_n \to f$

Definition 6.6 Supremum (minsta övre begränsningen)

Låt $A \sqsubset \mathbb{R}$ Om A är uppåt begränsad så definierar vi supremum av A, eller minsta övre begränsningen till A genom

$supA = \{$det minsta tal x sådant att $\geq$ a för alla a $\in A\}$.

Om A inte är uppåt begränsad, så säger vi att sup A $= \infty$

Suprema av funktioner:

$\sup_D f = sup\{f(x) : x \in D\}$

Definition 6.7 Supremumnormen

Om f är en (reelvärd eller komplexvärd) funktion, definierad på mängden D, så definierar vi supremumnormen eller L^∞-normen av f genom

$||f|| = ||f||_D = \sup_{x \in D} |f(x)|$.

Definition 6.8 Likformig konvergens av funktionsföljd

En funktionsföljd (f_n) där funktionerna f_n är definierade på mängden D kallas likformigt konvergent mot funktionen f på D om

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

Ibland skriver man detta som $f_n \xrightarrow{u} f$

Definition 6.11 Likformig konvergens mot gränsfunktion

Anta att $f_n : D \to \mathbb{C}$ där D är en öppen mängd. Om f_n konvergerar likformigt mot f på varje kompakt delmängd av D, så säger vi att f_n konvergerar lokalt likformigt mot f.

Sats 6.12 Koppling likformig konvergens, punktvis konvergens

Anta att $f_n : D \to \mathbb{C}$ är en följd av funktioner som konvergerar likformigt mot f. Då gäller att $f_n \to f$ punktvis

6.13 Likformig konvergens, kontinuitet

Anta att $f_n : D \to \mathbb{C}$ och att $f_n \to f$ likformigt på D. Om alla f_n är kontinuerliga på D, så är också f kontinuerlig på D.

Sats 6.16 Integral av likformigt konvergenta funktioner

Låt $I = [a, b] \sqsubset \mathbb{R}$ vara ett begränsat intervall och anta att $f_n : D \to \mathbb{C}$ är en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot f. Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Följdsats 6.19 Gränsvärde likformigt konvergent följd, holomorfism

Anta att $D \sqsubset \mathbb{C}$ är ett område och att f_n är en följd av holomorfa funktioner på D som konvergerar likformigt mot f. Då är också f holomorf. Dessutom gäller att derivatorna f_n' konvergerar likformigt mot f'

Sats 6.20 Implicit relation $f', f,$ godtycklig funktion g

Anta att $I \sqsubset \mathbb{R}$ är ett intervall och att f_n är en följd av C^1-funktioner som konvergerar punktvis mot f. Anta dessutom att f_n' konvergerar likformigt mot någon funktion g. Då gäller att $g = f'$, dvs. att $f_n' \to f'$.

Funktionsserie

En funktionsserie är en serie, där termerna beror av (minst) en variabel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Funktionsserien konvergerar punktvis på ett intervall $I \sqsubset \mathbb{R}$ om det för varje fixt värde på x gäller att serien konvergerar. Då är seriens summa en funktion på I, som vi kallar u(x).

Med andra ord konvergerar funktionsserien punktvis mot u(x) om och endast om resttermen konvergerar punktvis mot 0. Funktionsserien är likformigt konvergent om följden av partialsummor $s_n(x)$ är en likformigt konvergent funktionsföljd.

Sats 6.23 Weierstrass M-test

Anta att $u_k(x)$ är en följd av reell- eller komplexvärda funktioner på en mängd D. Om $|u_k(x)| \leq M_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergerar, så konvergerar funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

likformigt på D.

I synnerhet kan man ta $M_k = ||u_k||$, men eftersom normen $||u_k||$ ibland är svårt att beräkna är det ofta enklare att använda en grövre uppskattning av $|u_k(x)|$.

Sats 6.26 Funktionsserier, likformig konvergens och kontinuitet

Anta att $u_n : D \to \mathbb{C}$ är en följd av kontinuerliga funktioner och att serien

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

konvergerar likformigt. Då är också u kontinuerlig på D.

Sats 6.27 Likformig konvergens, integral av funktionsserie

Låt $I = [a, b] \sqsubset \mathbb{R}$ vara ett begränsat intervall. Anta att $u_n : I \to \mathbb{C}$ är en följd av kontinuerliga funktioner och att serien

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

konvergerar likformigt. Då gäller att

Sats 6.28 Relation mellan Funktionsserie och godtycklig funktion med likformig konvergens

Anta att $D \sqsubset \mathbb{C}$ och att u_k är en följd av C^1-funktioner sådana att serien

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

konvergerar punktvis. Anta dessutom att

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

är likformigt konvergent med summan $g(x)$. Då gäller att $u' = g$

7 Fourierserier

Definition 7.1 (Periodisk funktion)

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kallas periodisk med period T om $f(t+T) = f(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Extra: talet Ω kallas vinkelfrekvens och för den gäller alltid att $\Omega T = 2\pi$

Definition 7.5 (Absolut integrerbarhet)

Anta att f är definierad på ett intervall $I \sqsubset \mathbb{R}$. Om

$$\int_I |f(t)| dt < +\infty$$

så säger vi att f är L^1 eller absolut integrerbar (på intervallet I). Periodiska funktioner kallas L^1 om det är L^1 på ett intervall som motsvarar en period.

Definition 7.6 (Exponentiell fourierserie och dess koefficienter)

Anta att f är en T-periodisk L^1-funktion. Då kallas

$$c_k = \tfrac{1}{T} \int_P f(t) e^{-ik\Omega t} dt$$

(de exponentiella) Fourierkoefficienterna för f. Serien

$$FS_f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}$$

kallas (den exponentiella) Fourierserien för f. c_0 är medelvärdet av f över en period.

Sats 7.9 (Räknelagar och när de gäller)

Anta att f och g är T-periodiska och L^1. Om deras Fourierkoefficienter är $c_k(f)$ respektive $c_k(g)$, så gäller räknelagarna nedan.

Funktion	Fourierkoefficient nummer k	Kommentar
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha c_k(f) + \beta c_k(g)$	linjäritet
$f\prime(t)$	$ik\Omega c_k(f)$	om f är deriverbar(och $f\prime \in L^1$)
$f(t-\tau)$	$e^{-ik\Omega\tau}c_k(f)$	τ är en konstant
$e^{im\Omega\tau}f(t)$	$c_{k-m}(f)$	m är ett heltal
$f(t)g(t)$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k-m}(f)c_m(g)$	om $fg \in L^1$
$\int_P f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$c_k(f)c_k(g)$	"Faltningsprodukt"

Tabell 2: Räknelagar för Fourierkoefficienter

Symmetriregler för exponentiella Fourierkoefficienterna

f reelvärd $\Rightarrow c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$
f jämn $\Rightarrow c_{-k}(f) = c_k(f)$
f udda $\Rightarrow c_{-k}(f) = -c_k(f)$

Trigonometriska Fourierkoefficienterna och Fourierserien

Anta att f är en T-periodisk L^1-funktion. Då kallas

$a_k = \frac{2}{T}\int_P f(t)cos(k\Omega t)dt$
$b_k = \frac{2}{T}\int_P f(t)sin(k\Omega t)dt$

för de trigonometriska Fourierkoefficieterna för f. Serien

$$FS_f^{trig}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(k\Omega t) + b_k sin(k\Omega t))$$

kallas den trigonometriska Fourierserien för f. Observera att det är samma c_0 som för den exponentiella Fourierserien. Observera att c_0 kan skrivas om som $\frac{a_0}{2}$.

Samband a_k, b_k och c_k

$a_k = c_k(f) + c_{-k}(f)$
$b_k = i(c_k(f) + c_{-k}(f))$

Symmetriregler trigonometriska Fourierkoefficienterna

f udda $\Rightarrow a_k(f) = 0$
f jämn $\Rightarrow b_k(f) = 0$

Sats 7.13 Begränsning av exp. Fourierkoeffcienter

Anta att $f \in L^1$ är T-periodisk och begränsad, dvs. att det finns ett tal M sådant att $|f(t)| \leq M$ för alla t. Då är

$|c_k| \leq M$

Sats 7.14 Konstant begränsning av exp. Fourierkoefficienter

Anta att f är T-periodisk och C^m. Då finns en konstant C sådan att

$|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^m}$

för $k \neq 0$. Kom ihåg att $f \in C^m$ betyder att funktionen f och alla dess derivator av ordning $\leq m$ existerar och är kontinuerliga

Sats 7.15 (Fourierserier, likformig konvergens)

Anta att f är C^2 och T-periodisk. Då konvergerar Fourierserien för f likformigt mot $f(t)$ på hela $\mathbb{R}$

Sats 7.16 Likhet mellan Fourierserier och gränsfunktion

Anta att $f \in L^1$ är T-periodisk. Om t_0 är en punkt sådan att

1. f är kontinuerlig i punkten $t = t_0$
2. Höger- och vänsterderivatorna av f existerar i punkten $t = t_0$, dvs. gränsvärdena $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ och $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$

existerar(men är inte nödvändigtvis lika).

Då gäller att $FS_f(t_0) = FS_f^{trig}(t_0) = f(t_0)$, dvs. att

$$f(t_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(k\Omega t_0) + b_k sin(k\Omega t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t_0}$$

Sats 7.18

Anta att $f \in L^1$ är T-periodisk. Om t_0 är en punkt sådan att

1. Höger- och vänstergränsvärdena av f, dvs. $f(t_0 + 0) = \lim\limits_{t\to t_0^+} f(t)$ och $f(t_0 - 0) = \lim\limits_{t\to t_0^-} f(t)$, existerar (men är inte nödvändigtvis lika)

2. Gränsvärdena $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0+0)}{h}$ och $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0-0)}{h}$ existerar (men är inte nödvändigtvis lika). Observera att dessa gränsvärden inte riktigt är de vanliga höger- och vänsterderivatorna för f, eftersom $f(t_0)$ inte behöver existera. Vi ersätter alltså $f(t_0)$ med det motsvarande höger- respektive vänsterledet.

Då gäller att $FS_f^{trig}(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0+0)+f(t_0-0))$, dvs. att

$$\tfrac{1}{2}(f(t_0+0)+f(t_0-0)) = c_0 + \sum_k^{\infty} a_k cos(k\Omega t_0) sin(k\Omega t_0).$$

Samma gäller för den exponentiella Fourierserien, under förutsättning att vi bara betraktar symmetriska partialsummor, dvs.

$$\tfrac{1}{2}(f(t_0+0)+f(t_0-0)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\Omega t_0}$$

OBS! Viktigt att bara kolla på symmetriska partialsummor för FS_f i satsen.

Definition 7.19, L^2 och L^p

Anta att f är definierad på ett intervall $I \sqsubset \mathbb{R}$. Om

$$\int_I |f(t)|^2 dt < +\infty$$

så säger vi att f är L^2 (på intervallet I). Mer allmänt: om $p > 0$, så kallas f för L^p om

$$\textstyle\int_I |f(t)|^p dt < +\infty$$

T-periodiska funktioner kallas L^2 (respektive L^p) om det är L^2 (respektive L^p) på något intervall av längd T.

Sats 7.20 (Parsevals formel)

Anta att f och g är T-periodiska $L2$-funktioner. Då gäller att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)} = \frac{1}{T}\int_P f(t)\overline{g(t)}dt$$

I synnerhet, med $f = g$ får vi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_P |f(t)|^2 dt$$

Cosinusserien

Serien

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\frac{k\pi x}{L},$$

där $\alpha_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx$ och $c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$
kallas cosinusserien för f och är egentligen bara relevant för $0 < x < L$

Sinusserien

Serien
$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin\frac{k\pi x}{L}$ där $\beta_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$
kallas sinusserien för f. Sinusserien för f är egentligen meningsfull enbart för $0 < x < L$

8 Potensserier

Låt $c \in \mathbb{C}$. En potensserie centrerad i $z = c$ är en serie som går att skriva som

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-c)^k = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$$

En potensserie kan endast innehålla positiva heltalspotenser. Koefficienten framför $(z = c)^k$ får ej vara beroende av z.

Sats 8.3

Låt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-c)^k$ vara en potensserie. Då finns ett tal R, $0 \leq R \leq +\infty$ sådant att

1. Serien konvergerar (absolut) för alla z med $|z-c| < R$.
2. Serien divergerar för alla z med $|z-c| > R$
3. För varje r ¡ R, så konvergerar serien **likformigt** på cirkelskivan $|z-c| \leq r$. Talet R kallas seriens **konvergensradie**. Observera att det är praktiskt att tillåta R = $+\infty$. I detta fall konvergerar serien absolut för alla $z \in \mathbb{C}$ och likformig på $|z-c| \leq r$ för varje $r < \infty$.

Definition 8.5

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$. En funktion f: $\Omega \to \mathbb{C}$ kallas analytisk på Ω om det till varje punkt $c \in \Omega$ existerar en potensserie med positiv konvergensradie $R > 0$ (R kan bero av c), sådan att

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$, för alla z med $|z-c| < R$. Ibland pratar man även om analytiska funktioner definierade på $\mathbb{R}$ eller på något intervall i $\mathbb{R}$. Dessa definieras på samma sätt, med Ω utbytt mot ett intervall $I \sqsubset \mathbb{R}$

Sats 8.6

Om f är analytisk på ett område $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$, så är f holomorf på Ω

Sats 8.7

Konvergenta potensserier går att integrera och derivera termvis, utan att ändra konvergensradien.
Om:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k, \text{ för } |z-c| < R$$

så är

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z-c)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}(z-c)^k}{k}, \text{ för } |z-c| < R$$

en primitiv funktion till f(z). Dessutom är f deriverbar och

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-c)^k, \text{ för } |z-c| < R.$$

Sats 8.10 (Taylors sats för holomorfa funktioner)

Anta att f är holomorf på ett område Ω som innehåller cirkelskivan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$. Då går f att skriva som en potensserie centrerad i z = c,

$$f(z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k,$$

och seriens konvergensradie är åtminstone R. Dessutom är

$$a_k = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta$$

där γ är den positivt orienterade cirkeln $\gamma = \{\zeta : |\zeta - c| = r\}$ för något $z < R$.
obs!Som följd av denna sats vet vi att konvergensradien för en holomorf funktion är avståndet till den närmaste singulariteten. Kombinerar vi Taylors sats och Cauchys intg. formel. så ser vi att koefficienterna i potensserien för f går att skriva som

$$a_k = \tfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

Sats 8.13

Om f är holomorf på ett område Ω, så är också f' holomorf på Ω. Följaktligen har f derivator av alla ordningar, och alla dessa derivator är holomorfa.

Sats 8.14 Cauchys Integralformel, allmän form

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ vars rand $\gamma = d\Omega$ är en positivt orienterad, enkel, styckvis slät, sluten kurva. Anta att f är holomorf på en omgivning av Ω, låt $p \in \Omega$ och låt $n \geq 0$ vara ett heltal. Då är

$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}dz$

Sats 8.16 Entydighetssatsen för holomorfa funktioner

Anta att Ω är ett område i $\mathbb{C}$ och att f är holomorf på Ω. Om det finns en punkt $p \in \Omega$ sådan att

$f^k(p) = 0$

för alla heltal k=0,1,2,..., så är $f(z) = 0$ för **alla**$z \in \mathbb{C}$

Sats 8.18 Faktorssatsen för holomorfa funktioner

Anta att f är holomorf på Ω. Om $a \in \Omega$ och $f(\alpha) = 0$, så kan man skriva

$f(z) = (z-\alpha)g(z)$

där g också är holomorf på Ω.

Sats 8.20 Satsen om isolerade nollställen

Anta att f är holomorf på Ω och att $f(\alpha) = 0$. Om f inte är nollfunktionen, så går det att hitta en öppen mängd $U \ni a$, sådan att $f(z) \neq 0$ för alla $z \in U \setminus \{a\}$.

Sats 8.22 Identitetssatsen för holomorfa funktioner

Anta att f och g är holomorfa funktioner på området $\Omega \sqsubset \mathbb{C}$. Om mängden $E = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)$ har någon **hopningspunkt** i Ω så är $f = g$ på hela Ω.

9 Singulariteter

Definition 9.1 Isolerad singularitet

Vi säger att funktionen f har en isolerad singularitet i $z = c$ om det finns ett område $\Omega \ni c$ sådant att f är holomorf på $\Omega \setminus \{c\}$.

Definition 9.3 Hävbar singularitet, pol, väsentlig singularitet

Anta att f har en isolerad singularitet i punkten $z = c$

1. Om $|f|$ är begränsad på en punkterad omgivning av $z = c$, så säger vi att singulariteten är hävbar.

2. Om $\lim_{z \to c} |f(z)| = +\infty$, så kallas singulariteten för en pol.

3. Om inget av ovanstående fall gäller, dvs. om $|f|$ är obegränsad nära $z = c$, men gränsvärdet $\lim_{z \to c} |f(z)|$ inte existerar, så kallas singulariteten väsentlig.

Sats 9.4 Riemanns sats om hävbara singulariteter

Anta att f har en hävbar singularitet i $z = c$. Då existerar gränsvärdet

$$L = \lim_{z \to c} f(z)$$

och om vi definierar en ny funktion

$$\tilde{\mathrm{f}}_{r-j} = \begin{cases} \mathrm{f(z)}, & \mathrm{z} \neq c \\ L, & \mathrm{z=c.} \end{cases}$$

så blir$\tilde{\mathrm{f}}_{r-j}$ holomorf även i $z = c$. Observerar att genom att tilldela f(x) ett bestämt värde häver vi singulariteten

Sats 9.7

Anta att f har en pol i z = c. Då finns det ett positivt heltal m, sådant att
$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$
där g är holomorf på en omgivning av $z = c$ och $g(c) \neq 0$. Talet m kallas polens ordning.

10 Residykalkyl

Definition 1.1 Residy

Anta att f har en isolerad singularitet i $z = \alpha$. Vi definierar residyn av f i $z = a$ som

$$\underset{z \to \alpha}{Res}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz,$$

där γ är någon positivt orienterad, enkel sluten kurva som omsluter $z = \alpha$, men ingen annan singularitet.

Sats 10.2 Residysatsen

Anta att f är holomorf på ett enkelt sammanhängande område Ω så när som på ett ändligt antal isolerade singulariteter $\alpha_1, \alpha 2, ... \alpha_N \in \Omega$. Om γ är en positivt orienterad, enkel sluten kurva i Ω som inte går genom någon av singulariteterna, så är

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \underset{z=\alpha_k}{Res}(f)$$

där summan tas över alla α_k som ligger inuti γ

Sats 10.3 Residyregel 1

Anta att g är holomorf på en omgivning av $z = \alpha$ och att N är ett positivt heltal. Då är

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(\tfrac{g(z)}{(z-\alpha^N)}\right) = \tfrac{g^{N-1}(\alpha)}{(N-1))!}$$

Mer allmänt: om f har en pol av (högst) ordning N i $z = \alpha$, så är

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}(f) = \tfrac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to\alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}((z-\alpha)^N f(z)).$$

Sats 10.4 Residyregel 2

Anta att g är holomorf på en omgivning av $z = \alpha$ och att N är ett positivt heltal. Om g har en potensserieutveckling kring $z = \alpha$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$$

så är

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(\tfrac{g(z)}{(z-\alpha)^N}\right) = c_{N-1}$$

Sats 10.5 Residyregel 3

Om f har en enkel pol i $z = \alpha$, så är

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}(f) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

Sats 10.6 Residyregel 4

Om f och g är holomorfa i en omgivning av $z = \alpha$, $f(\alpha) \neq 0$ och g har ett enkelt nolltställe i $z = \alpha$, så är

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\left(\tfrac{f}{g}\right) = \tfrac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Trigonometriska integraler över $[0\,2\pi]$

1. Variabelbyte $z = e^{i\theta}$ (där θ är integrationsvariabeln).
2. f är nu en funktion med isolerade singulariteter, vilket innebär att vi kan använda residysatsen för att beräkna integralen.
3. Hitta f:s poler och summera residyn för de som ligger inuti konvergensradien.

Sats 10.13 Jordans lemma

Låt C_R^+ vara den positivt orienterade halvcirkeln $|z| = R$, $Imz \geq 0$. Om $\alpha > 0$ och f är kontinuerlig på C_R^+ så gäller att

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)e^{i\alpha t}dz\right| \leq \frac{\pi}{\alpha} \max_{z\in C_R^+} |f(z)|$$

I synnerhet om $\max_{z\in C_R^+} |f(z)|$ går mot 0, då $R \to \infty$ så gäller att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} f(z)e^{i\alpha t}dz = 0$$