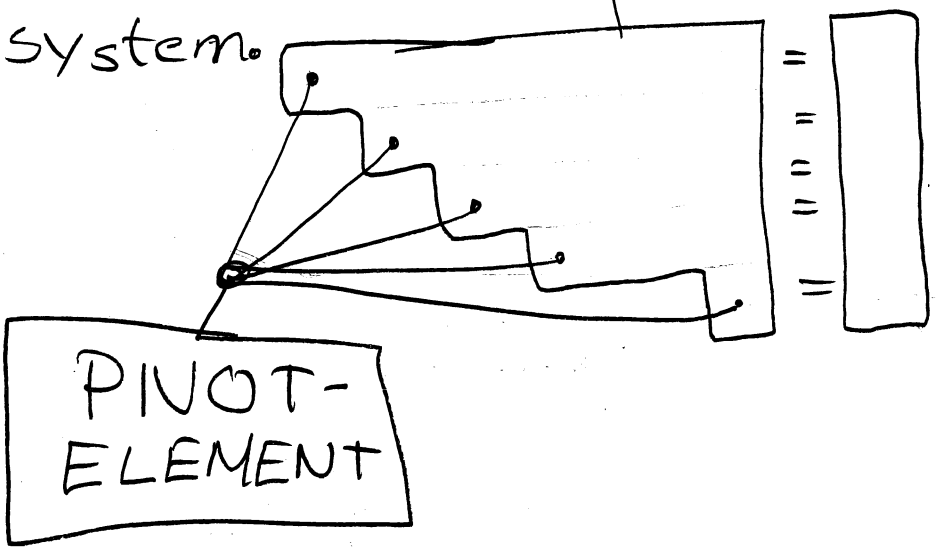
KAPITEL 1

linjär ekvation = $\boxed{ax+by+cz=d}$

- Gausselimination eller successiv eliminering skapar ett $\boxed{\text{trappformat}}$ ekvationssystem.



Alla ekvationssystem under en gaussning är ekvivalenta, df kan man gaussa rad 2 i ekv-syst 3 med rad 1 i ekv.-syst. 1 om man så behagar gör

Tre typer av lösningsmängd

Oändligt många lösningar

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x,y,z)=t(1,-2,1) \quad t\in\mathbb{R}$

- sätt in en parameter t! Om det behövs så sätt även in en andra parameter s!

Lösning saknas

$$\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ y+2z=5 \\ \boxed{0=9} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Gäär inte}}$

Entydig lösning

$$\begin{cases} -3x+5y+z=1 \\ 3y+2z=7 \\ z=1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ ← $\boxed{\text{återsobstitution}}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

UNDERBESTÄMD

Färre ekvationer än obekanta

$$\begin{cases} 2x+5y+3z=7 \\ 8x-37y+5z=-3 \end{cases}$$

2 rader

3 obekanta

$2<3$

#

ÖVERBESTÄMD

Fler ekvationer än obekanta

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x+2y=7 \\ 5x-3y=-1 \end{cases}$$

3 rader

2 obekanta

$3>2$

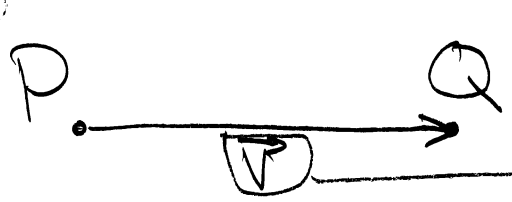
#

KAPITEL 2

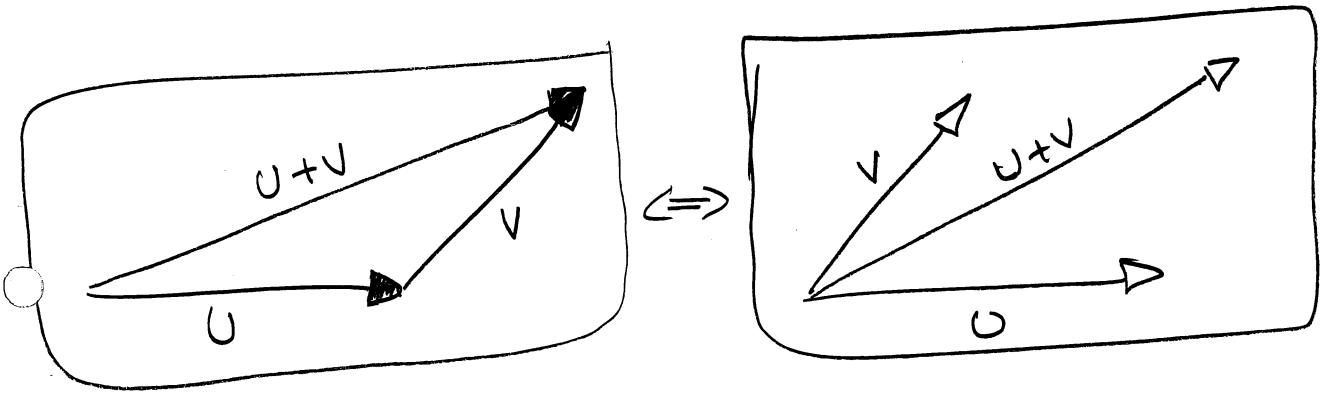
Skalär = storhet

vektor = storhet + riktning

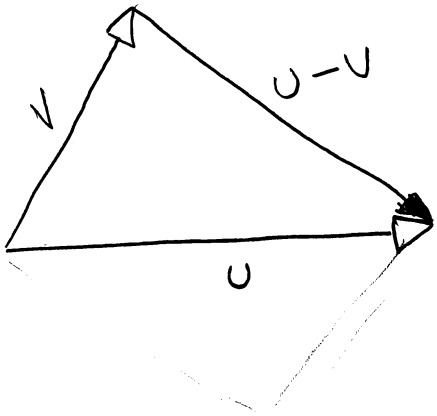
riktad sträcka = storhet + riktning + fotpunkt



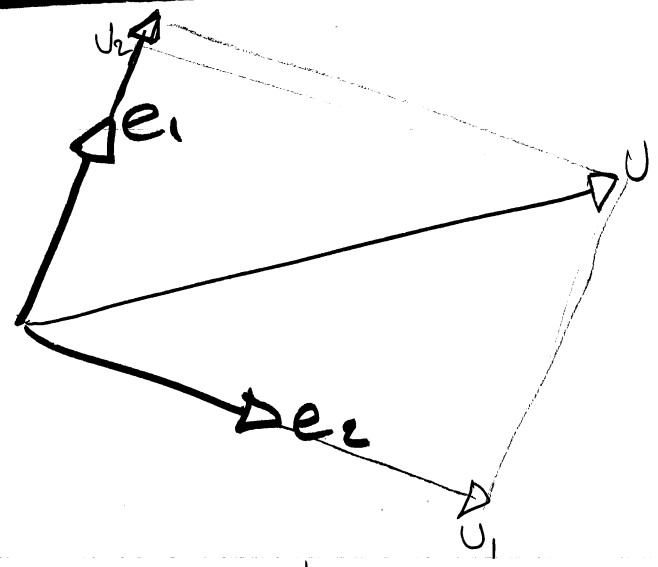
$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{PQ}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} u+u &= 2u \\ u+0 &= u \\ u+v &= v+u \\ u\cdot(-1) &= -u \end{aligned}}$$



BASER och koordinater



skalär

$$U = U_1 + U_2 = \boxed{X_1}\,\boxed{e_1} + \boxed{X_2 e_2}$$

basvektor

komposant

$$\boxed{3D:\ U = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3}$$

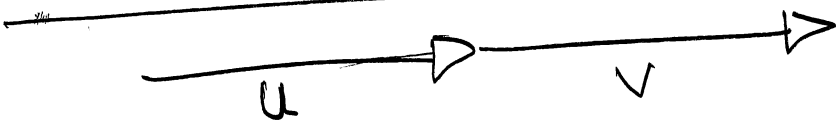
osv...

$$\boxed{\text{Skrivs ofta: } U = (X_1, X_2, X_3)}$$

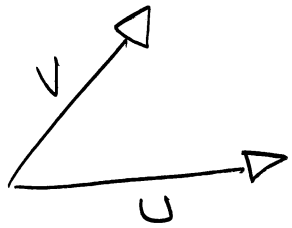
LINJÄRT (O)beroende

Vektorerna $u_1 \dots u_n$ sägs vara en <u>linjärt beroende</u> om någon av dem är en linjärkombination av de andra.

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$, minst 1 λ måste vara skilt från noll!



$\boxed{u = xv}$ — linjärkombination

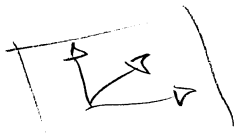


$\boxed{u \neq xv}$ — linjärt oberoende

BASSATSEN (s34)

Två vektorer är linj. ber. $\Leftrightarrow$ parallella

Tre vektorer är linj. ber $\Leftrightarrow$ de ligger i ett plan



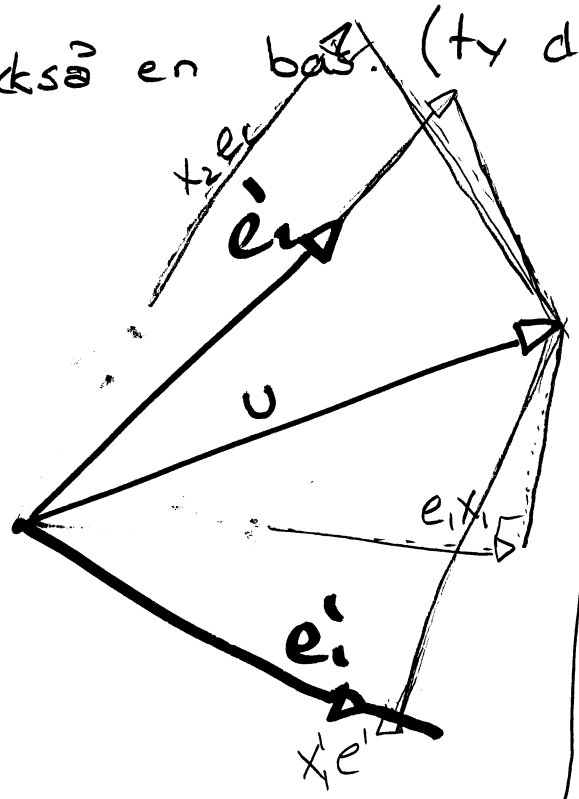
BASBYTEN

Låt e_1, e_2 vara en bas i planet

Vektorerna

$$* \begin{cases} e_1' = 3e_1 - 2e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

är också en bas. (ty de är ej parallella).



$$\boxed{\begin{aligned} u &= x_1e_1 + x_2e_2 \\ u &= x_1'e_1' + x_2'e_2' \end{aligned}}$$

Vi söker sambandet mellan x_1, x_2 och x_1', x_2'.

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 = x_1'e_1' + x_2'e_2'$$

$\Updownarrow$ ← Insättning av $*$

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 = x_1(3e_1 - 2e_2) + x_2'(e_1 + 2e_2)$$

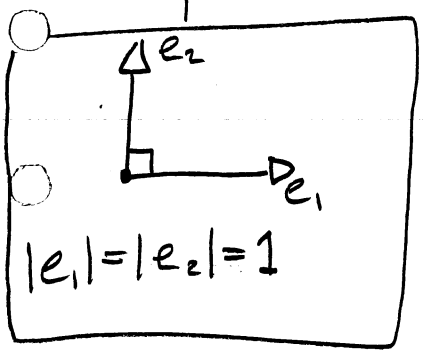
$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1' + x_2' \\ x_2 = -2x_1' + 2x_2' \end{cases}$$

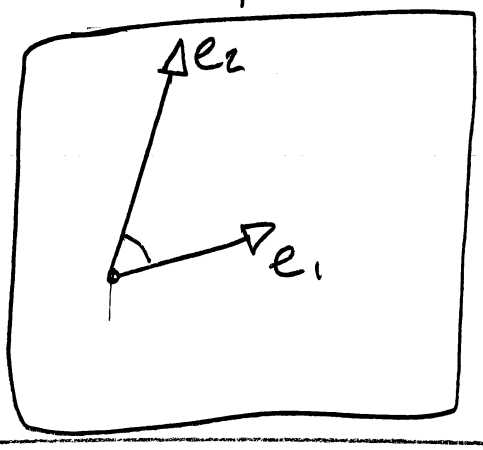
KAPTILEL 3

LINJER OCH PLAN

ortogonalt koordinatsystem



sneduinkligt koordinatsystem

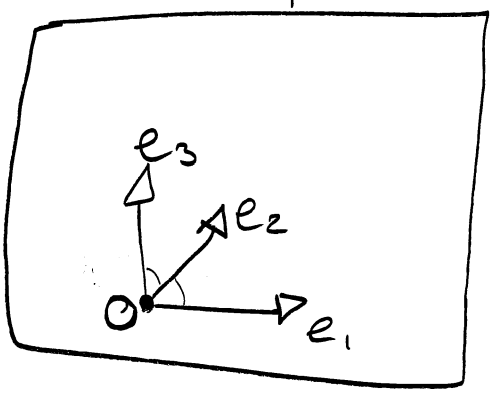


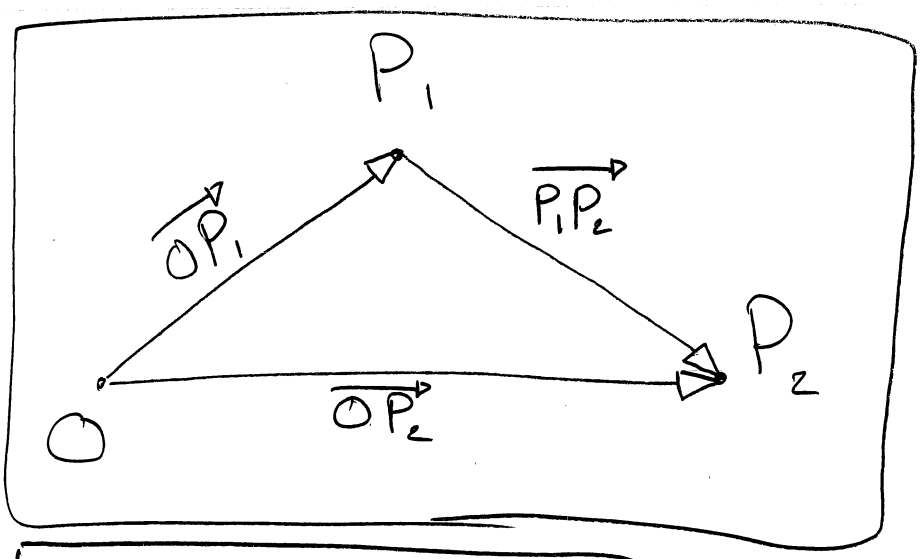
$e_1 e_2 e_3$ är BASER

$O e_1 e_2 e_3$ är KOORDINATSYSTEM

O = Origo

koordinater $(0,0,0,0,\dots,0)$





$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}}$$

→ sätt in $P_1:(x_1, x_2, x_3)$ och $P_2:(y_1, y_2, y_3)$ för att bevisa.

EXEMPEL

Bestäm masscentrum för $\boxed{A, B, C.}$ punkter

$A:(1,0,0)$ $B:(2,-1,1)$ $C:(3,1,2)$

M = masscentrum

Tyngdpunktsformeln: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left((1,0,0) + (2,-1,1) + (3,1,2)\right) = \boxed{(2,0,1)}$$

Vektorn $\overrightarrow{OM}$ pekar på M från origo, alltså har M koordinaterna: $(2,0,1)$

Linjens ekvation

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases} \iff \overrightarrow{P_0P} = tu$$

$$\boxed{t \in \mathbb{R}}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(\alpha, \beta, \gamma),$$

Korsande linjer

$$l_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

sätt t i l_2 till s och sätt $\boxed{l_1 = l_2}$

$$\begin{cases} 1 - t = 2 - s \\ 2 + t = 1 - s \\ -1 + 4t = 1 + 2s \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = 1 \\ 2t = -2 \\ \boxed{0 = 6} \end{cases}$$

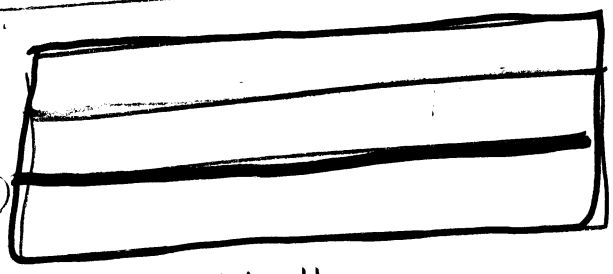
$\boxed{\text{saknar lösning}}$

l_1 och l_2 skär $\boxed{\text{inte}}$ varandra!

MER OM SKÄRANDE LINJER!

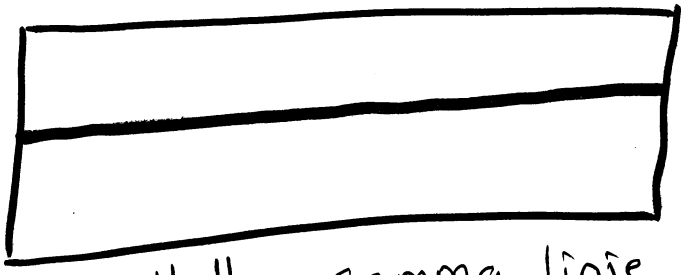
I ett plan skär alla icke parallella linjer varandra.

Om två parallella linjer skär varandra gör de det i ALLA punkter på linjerna och är därför samma linje...



Parallella

Icke parallella, skarning



parallella, samma linje
∞ många skärningspunkter

PARAMETERFORM

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Glöm ej att skriva

Nedan visar jag hur man går fr. p-form till affin form.

- Bryt ut t

$$t = \frac{x-1}{-1}, \quad t = \frac{y-2}{3}$$

- Sätt uttrycken lika med varandra

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \iff \boxed{3x + y - 5 = 0}$$

Affin form

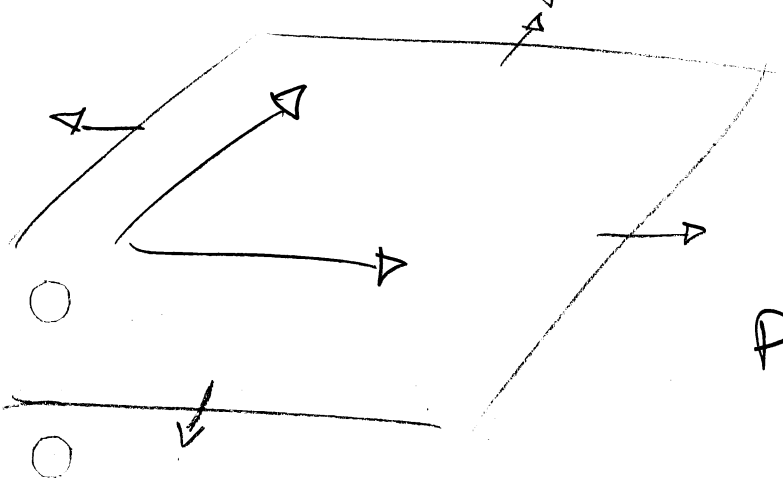
$$\boxed{3x + y - 5 = 0}$$

Affin → Parameter

- sätt $x = t$
- Bryt ut y $(y = 5 - 3x = 5 - 3t$
- $\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 3t \end{cases} \iff (x, y) = (0, 5) + t(1, -3)$

Planets ekvation

Ett plan spänns upp av två vektorer



Detta innebär att vi behöver två parametrar t_1, t_2

Parameterform: $\begin{cases} x = -1 + t_1 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 - 2t_2 \\ z = 2 + t_1 - t_2 \end{cases}$

Affin form: $\pi: ax + by + cz + d = 0$

π = plan $\boxed{\text{NORMALVEKTOR} = (a, b, c)}$

$P: (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

Om man har n plan ($n \geq 3$) så kan följande hända:

1) Planen saknar gemensamma punkter
2) Planer skär varandra i en punkt
3) Planen skar varandra i en linje
4) Planen är identiska

OM $N = 2$ kan ej 2) hända.

KATIPEL 4

SKALÄR PRODUKT

$u = (a_1, b_1, c_1) \quad v = (a_2, b_2, c_2)$

$$\boxed{u \cdot v = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2}$$

resultatet blir ett <u>tal</u> (skalär)

$[u,v] = \theta$

$u \cdot v > 0$ om $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$u \cdot v < 0$ om $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

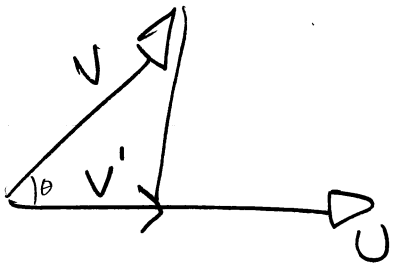
$\boxed{u \cdot v = 0}$ om $\theta = \frac{\pi}{2}$ eller $u = 0$ eller $v = 0$

→ u och v är ortogonala

$$\boxed{u \perp v \Longleftrightarrow u \cdot v = 0}$$

$$\boxed{u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos[u,v]}$$ — viktigt

Ortogonal Projektion



$/\cos\theta$

$$\boxed{v' = \frac{v \cdot u}{|u|^2} \cdot u}$$

om $|u| = 0$ är $v' = (v \cdot u)\, v$

Bevis

$$u \cdot v = \boxed{|u| \cdot |v| \cdot \cos[u, v]}$$

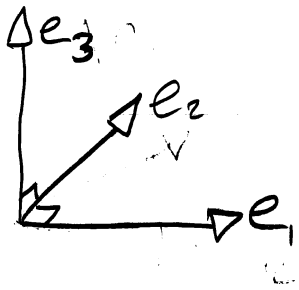
v ska ha längden 1

$$v' = \left(|v| \cos[v, u]\right) \cdot \boxed{\frac{v}{|v|}}$$

$$v' = \frac{|u||v| \cos[v, u]}{|v|} \cdot \frac{v}{|v|}$$

$$\boxed{v' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v}$$

Ortonormerad bas



$$\boxed{e_1 \perp e_2 \perp e_3}$$

Detta betyder att:

$$\boxed{\begin{aligned} &e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0 \\ &|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1 \end{aligned}}$$

Om $e = (a, b, c)$ är

$$|e| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

I ett ortonormerat koordinatsystem är basvektorerna alltså vinkelräta, detta gör många geometriska tillämpningar lättare att utföra.

AVSTÅND MELLAN PUNKTER

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P=(x_1,x_2,x_3) \\ Q=(y_1,y_2,y_3) \end{array}}$$

I planet motsvaras detta av Pythagoras sats.

VINKELBESTÄMNING

$$\cos[u,v] = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$ (direkt ur definitionen)

PLANETS NORMALRIKTNING

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$(\alpha, b, \gamma) \parallel \pi \iff a\cdot\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

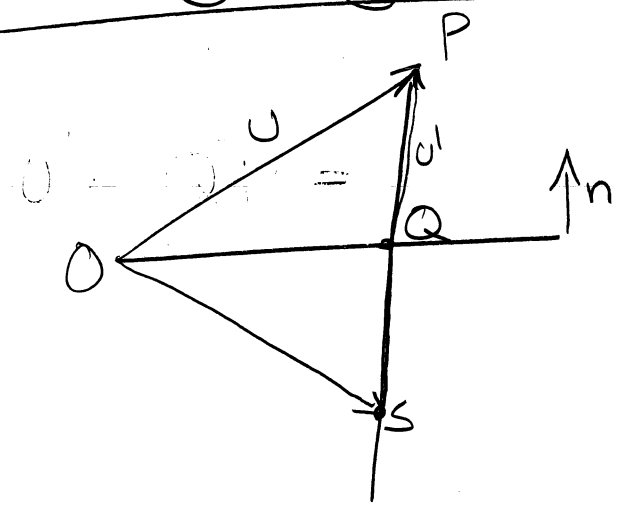
$\iff (a,b,c)(\alpha,\beta,\gamma)=0 \iff n(a,b,c) \perp (\alpha,\beta,\gamma)$

Alltså

En vektor $n \neq 0$ med denna egenskap kallas för normalvektor

$$\boxed{n=(a,b,c)}$$

Speglingar i plan



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 2u' = \boxed{u - 2u'}$$

$$u' = (u\text{:s projektion på } n) = \frac{u \cdot n}{|n|^2} n$$

$$\boxed{\overrightarrow{OS} = u - 2\frac{u \cdot n}{|n|^2} \cdot n}$$

Avstånd mellan plan och linje

GOOGLA

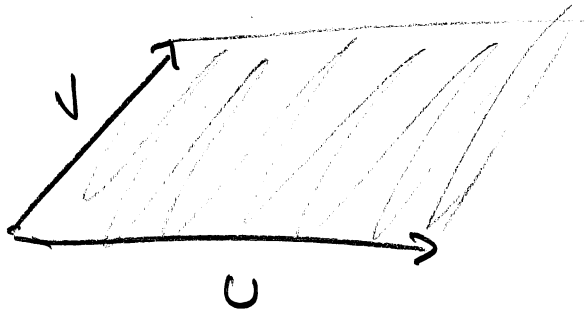
KAPITEL 5


motors


medurs

Vektorer är positivt orienterade om v_1 = tumme, v_2 = pekfinger, v_3 = fu-finger.

Def



$u \times v$ = Arean av parallellogrammet ovan

$u \times v$ är en vektor som är ortogonal mot u & v.

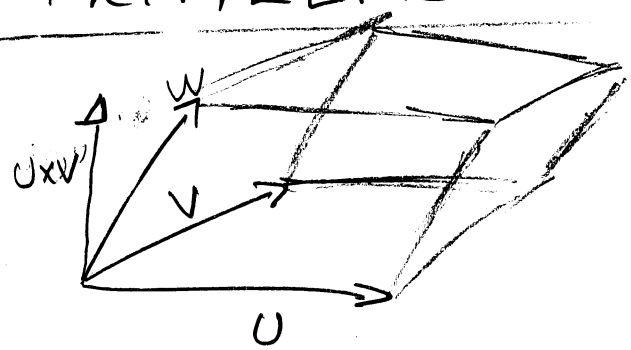
$|u \times v| = |u||v| \sin[u, v]$

u, v och $u \times v$ är positivt orienterade

---

* SKALÄR TRIPPELPRODUKT

$\boxed{(u \times v) w}$



$(u \times v) w = W$ vid pos. orient.

$(u \times v) w = -W$ vid neg. orient.

KAPTLE 6

Rummet $\mathbb{R}^n$

$v_1 \dots v_n$ sägs vara en bas i $\mathbb{R}^n$ om de är linjärt oberoende.

Alltså:

$$\boxed{y \in \mathbb{R}^n \text{ kan skrivas: } \sum_{k=1}^{n} v_n \cdot x_n}$$

$v_1 \dots v_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ om varje $y \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av $v_1 \dots v_n$

Bassatsen (igen)

i) varje bas i $\mathbb{R}^n$ har n element

ii) n st. vektorer utgör en bas

$\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende

$\Leftrightarrow$ de spänner upp $\mathbb{R}^n$

iii) fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är <u>alltid</u> linjärt beroende!

färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$.

VIKTIGT

Kolla om vektorerna är linjärt oberoende genom att:

- Sätta upp ett ekvationssystem

$\boxed{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0}$

Inga lösn: linj. ober.

om <u>två</u> ellen ~~a~~ <u>tre</u> eller <u>osv</u> vektorer är linj-komb så spänns inte helan $\mathbb{R}^n$ upp.

KARTIKLE 7

MATRISER

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \boxed{m \text{ rader}}$$

$\boxed{n \text{ kolonner}}$

enhetsmatrisen

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

skrivs som $\boxed{m \times n}$ matris

$\boxed{\text{rad} \times \text{kolonn}}$

a_{ij} kallas matriselement.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

[ ] = ( ) fast [ ] sparar papper...

$\boxed{A \cdot B \neq BA}$ (oftast)! ← VIKTIGT

TRANSPONERING

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Om $\boxed{A = A^T}$ är A symmetrisk

tex

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = A^T}$$

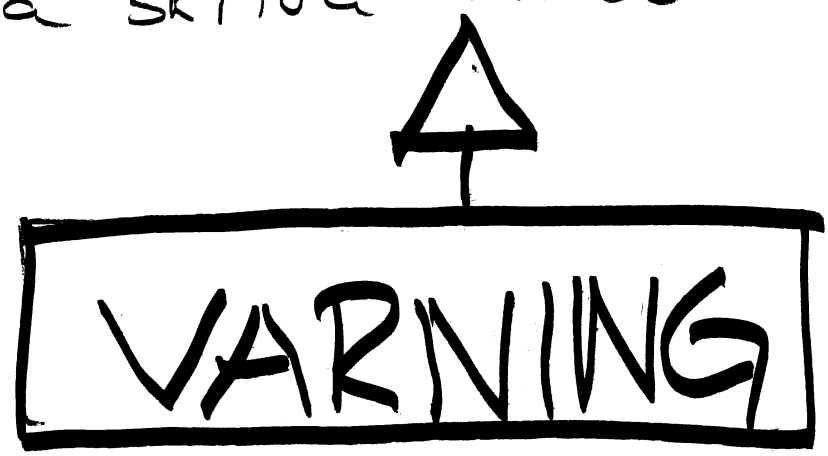
$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Nu börjar jag bli trött på att sammanfatta och kommer orka skriva mindre än innan



Invers MATRIS

$$AX = Y$$
$$\Updownarrow$$
$$X = A^{-1}Y$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Eftersom man av någon anledning inte kan dela med en matris så måste vi hitta på något. Så blev A^{-1} på hittat.

Hur hittar jag A^{-1}?

OM $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Btw

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

löses ekvationen $\begin{cases} x + 2y = z_1 \\ 3x + 4y = z_2 \end{cases}$

alltså

får: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & -2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

I början trodde man att det var skillnad på en högerinvers och en vänster-invers men en sida senare insåg man att så inte var fallet.

$$\boxed{A^{-1} = V = H}$$

(Nu ger jag en liten sneak peak från kapitel tio men ett nytt sätt att få fram inversen är:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A}$$

Denna metod går dock bara fortare än Gauss i 2x2-matriser eller då man har parametrar.

ORTOGONAL MATRIS

Mat A är ortogonal om dess $\boxed{\text{kolonnvektorer}}$ utgör en ortonormerad bas

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

SATS 7 (s.139)

Ekvivalenta villkor:

Mat A är ortogonal

kolonn/radvektorerna utgör en bas

$A^T A = I$

$A A^T = I$

$A^{-1} = A^T$

RANG OCH NOLLDIMENSION

$AX = Y$:s motsvarande homogena system är: $AX = 0$

$X_{allm} = X_p + X_h$

X_p är en partikulärlösning

Kolonnrum = antal linjkomb av kolonnmatriser

Rang = maximalt antal linj. ober. kolonnmatriser

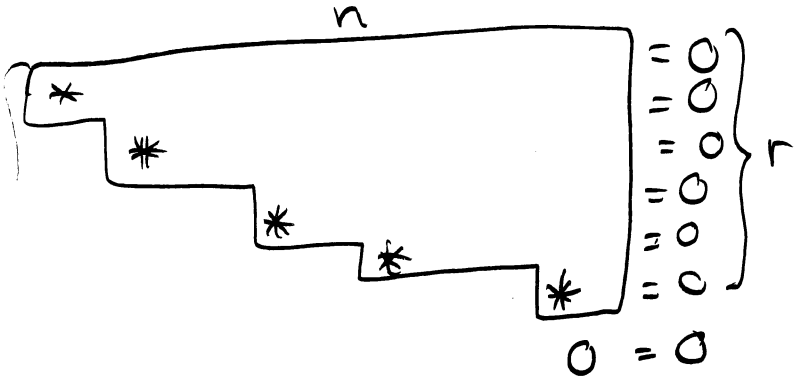
Nollrum = mängden av lösningar till $AX=0$

Nolldim = maximala antalet linj. ober. lösn. till $AX=0$

$$\boxed{\text{Rang } A + \text{Nolldim } A = \text{Antal k-vektorer}}$$

Eftersom pivotkolonnerna är linj. ober. så utgör de bas för kolonrummet.

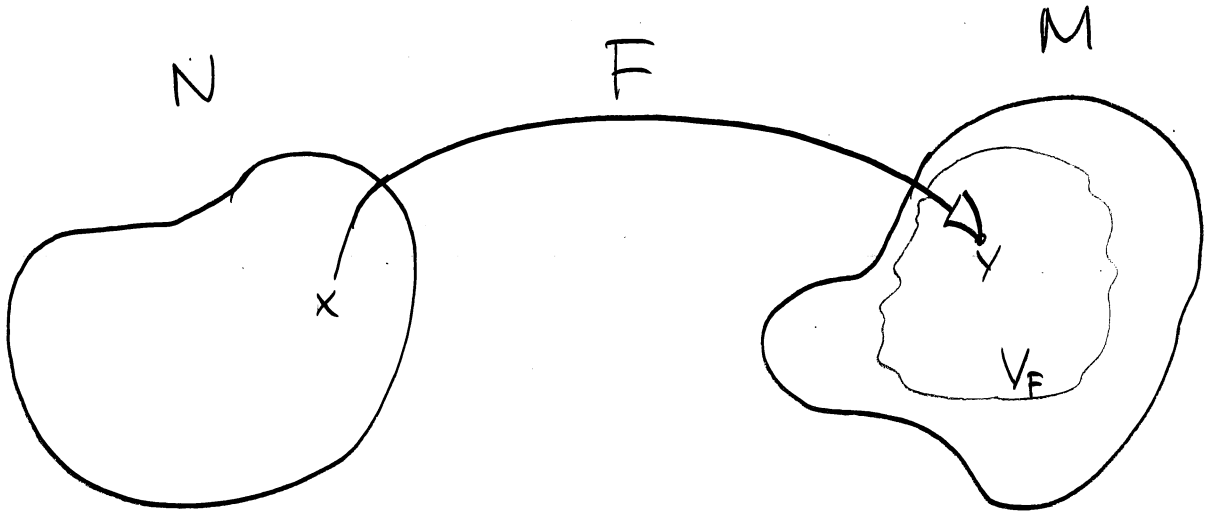
SATS 9 (s 149) Låt A vara en $m \times n$-matris



- r = antal rader med siffror
- Rang $A = r$
- nolldim $A = n - r$

KAPTIEL 8

LINJÄRA AVBILDNINGAR



funktion

$F: N \longrightarrow M$

- Till varje x i en mängd N ordnas ett element y i en Mängd M.
- Y är en bild av x

$y = F(x) \Longleftrightarrow F: x \longrightarrow y, \quad x \in N$

LINEARITETSEGENSKAPEN

Def

$$\begin{cases} F(x'+x'') = F(x') + F(x'') & x \in \mathbb{N} \\ F(\lambda x) = \lambda F(x) & , \lambda \in \mathbb{R} \ , x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

"Bilden av en summa är lika med summan av bilderna" – G. Sparr.

I denna kursen håller vi bara på med linjära funktioner. Df är det viktigt att kunna testa om F är linjär.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1 \text{ Testa om} & F(\lambda x) = \lambda \cdot F(x) \\ 2 \text{ Testa om} & F(x+x') = F(x) + F(x') \end{array}}$$

Alltså: $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$

SATS

- $y = F(x) \Longleftrightarrow y = Ax$
- A:s kolonnvektorer är bilderna av basvektorerna, dvs $F(e_1)$, $F(e_2)$ osv...

DEF.

Mat A kallas avbildningsmatrisen för F med avseende på de givna baserna i N och M.

ex

$$F(x) = \frac{x\,v}{|v|^2}\,v \qquad v = (1,-1,1)$$

$$\boxed{e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)}$$

- SÄTT IN

$$F(e_1) = \frac{(1,0,0)(1,-1,1)}{3}\cdot(1,-1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

$$F(e_2) = \frac{1}{3}(-1,1,-1)$$

$$F(e_3) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

- Gör om till kolonnvektorer.

$$F(e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- Gör en avbildningsmatris

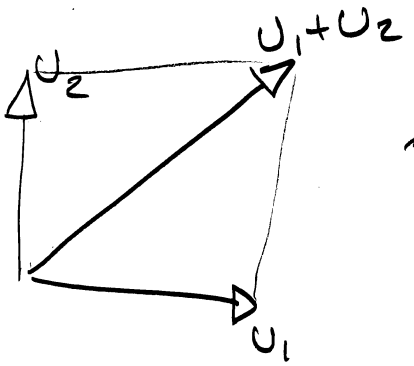
$$\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}}$$

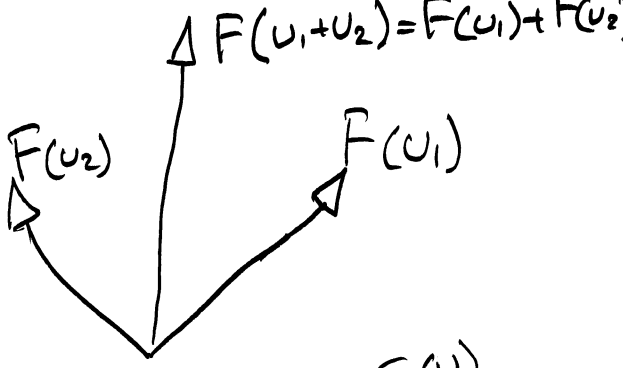
ROTATION

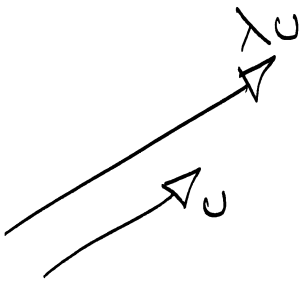
(Rotera med vinkeln θ motors)

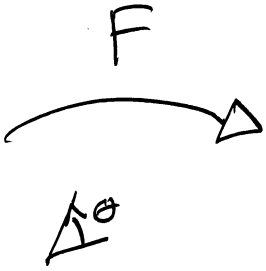
- Om man roterar en summa av två vektorer är det samma sak som att rotera vektorerna var för sig och sen lägga ihop.

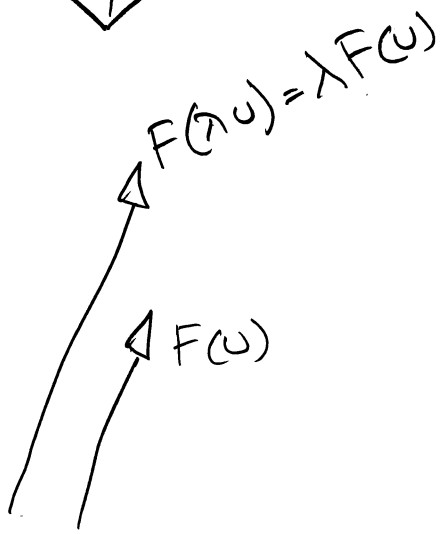
- Om man roterar en λ-tipel ~~av~~ en vektor ~~av~~ får man samma sak som att rotera vektorn och sen gångra in.





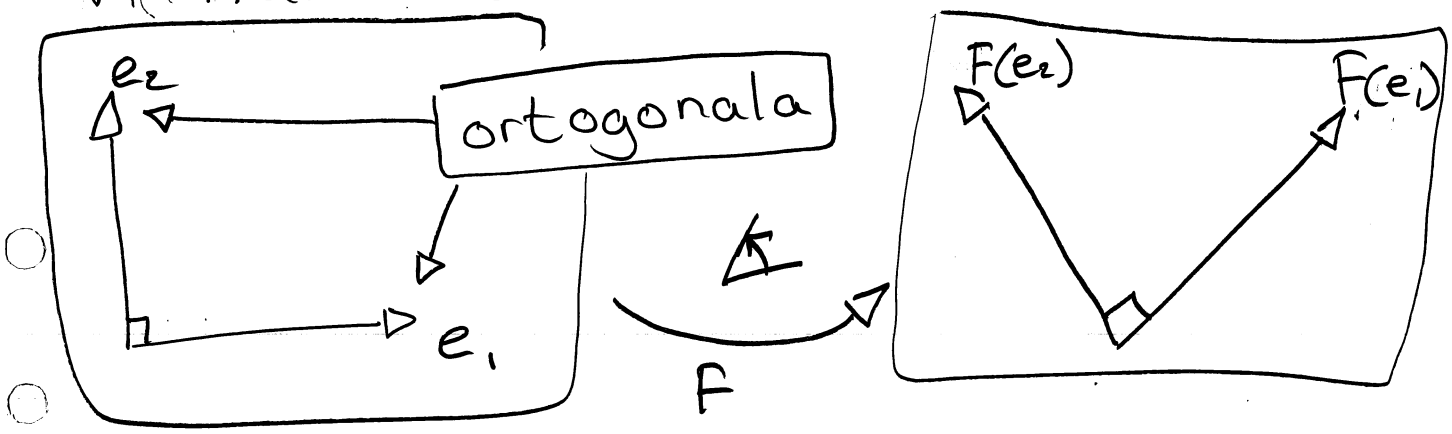






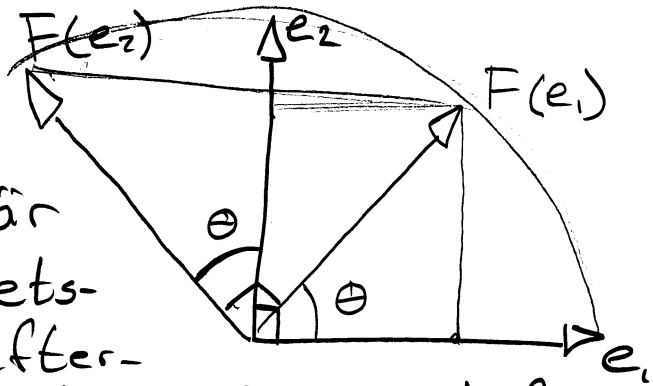
OKEJ, DETTA ÄR BRA ATT MINNAS:

Vi har två basvektorer e_1 och e_2.



$|e_1| = 1$

SAMMANFATTNING



Detta är en enhetscirkel eftersom $|e_1| = |e_2| = 1$ så ur definitionen av cos/sin ges att:

$$F(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$$

$$F(e_2) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e_2 = -\sin\theta + \cos\theta\, e_2$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

Speciella Avbildningar

ortogonal projektion i rummet på N

$$\boxed{A = \frac{1}{N^T N} N N^T}$$

<u>spegling</u>

$$\boxed{A = I - 2\frac{1}{N^T N} N N^T}$$

<u>Nytt ord att kunna</u>

En linjär avbildning sägs vara <u>isometrisk</u> om

$|F(x)| = |x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$

F bevarar alltså avstånd mellan punkter

$\boxed{\text{SATS 3}}$ Isometriska avbildningar har ORTOGONALA MATRISER!

s 174

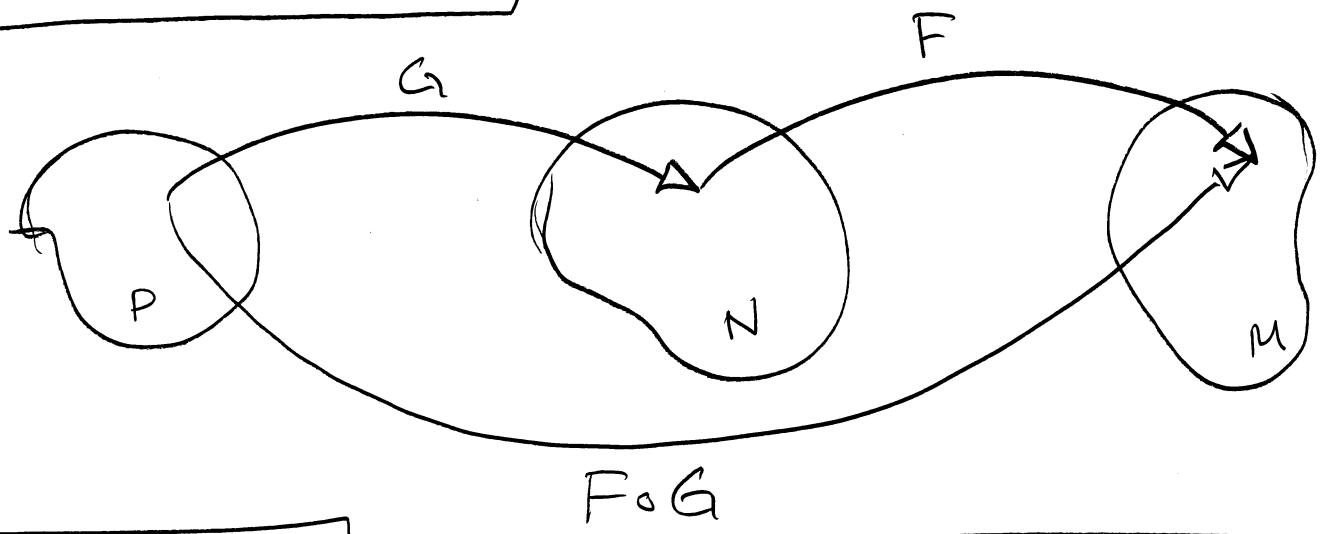
SAMMANSÄTTNING OCH INVERS AVBILDNING

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ y_2 = -4x_1 + 2x_2 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{Y = AX}$$

Har inget med något att göra

$$\boxed{F \circ G : x \to F(G(x))}$$ ← G först, G innerst!



$$\boxed{F \circ G : P \to M}$$

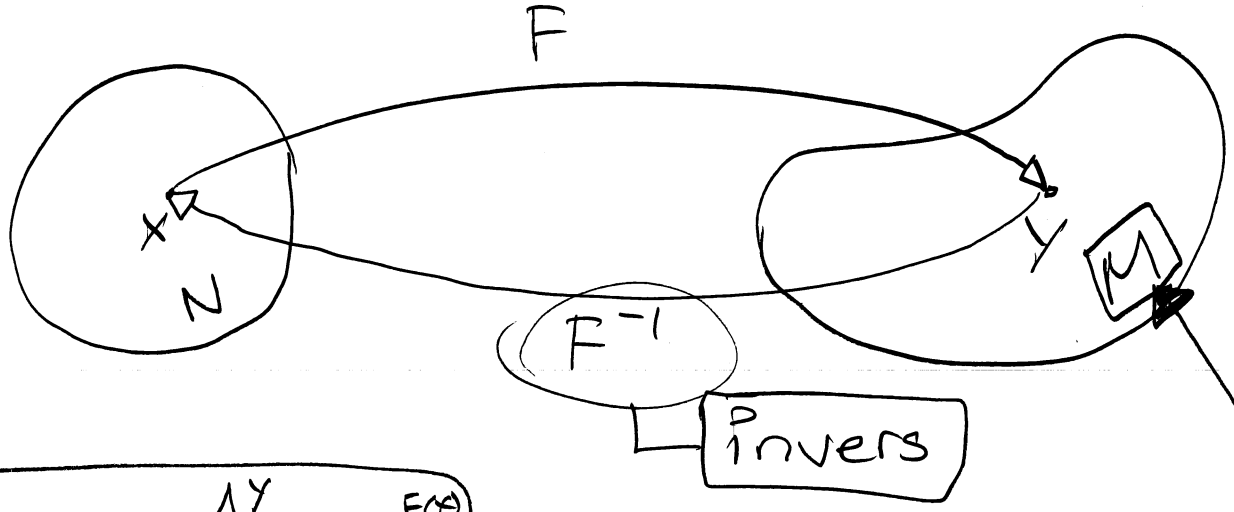
$F: Z = AY$, $G: Y = BX$

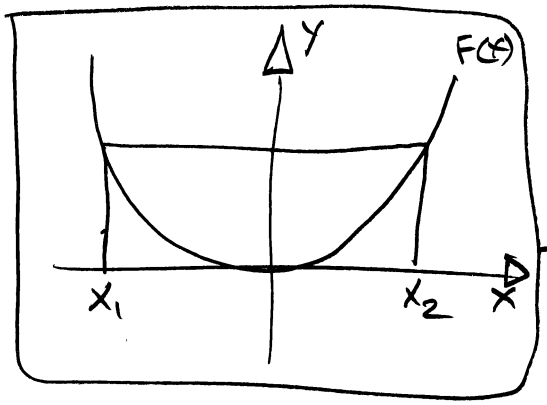
$F \circ G = Z = A(BX) = (AB)X$

$F \circ G = \boxed{AB}X$ avbildnings-matris

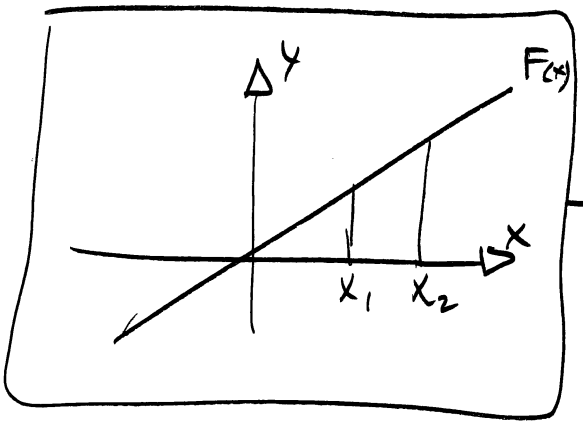
INVERSEN

[redacted] = en enda pil landar på varje y.



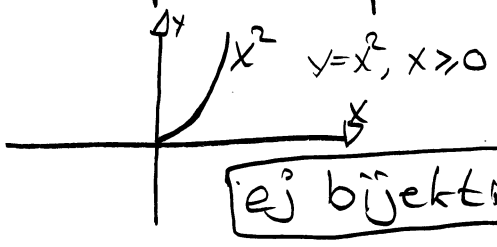


ej injektiv

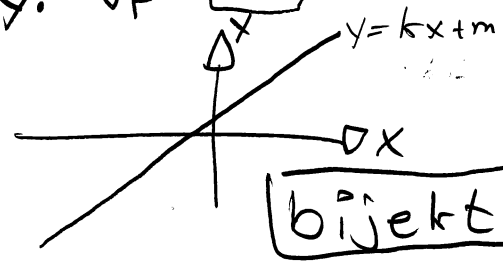


injektiv

[redacted] = Ekvationssystemet $Y = AX$ har en entydig lösning. Det hamnar alltså pilar på <u>alla</u> y. $V_F = \boxed{M}$



ej bijektiv



bijektiv

BASBYTEN

$$\boxed{X = SX'}$$

Basbytesmatris

$$\boxed{F: N \to N}$$

$$Y = AX$$
$$Y' = A'X' \quad F$$

Här svarar X och X' mot samma vektor vilket betyder att:

$$\boxed{X = SX'}$$

Lite magi nedan:

Vi vet: $Y = AX$, $X = SX'$, $Y = SY'$

$$Y = AX \iff SY' = ASX'$$

$$\iff \boxed{Y' = (S^{-1}AS)X}$$

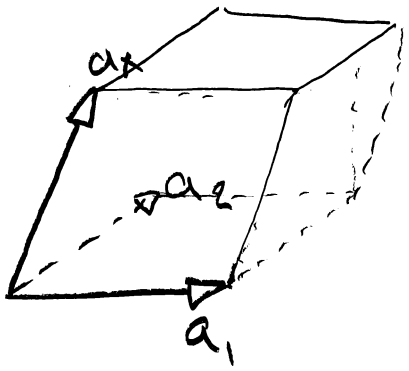
VIKTIGT!
Använd detta vid basbyte

$Y' = A'X'$
med
$A' = \boxed{S^{-1}AS}$ ← såhär får du fram avbildningsmatrisen i nya koordinatsystemet

KAPETIL 9

DETERMINANTER

Volym och Area



Vektorerna a_1, a_2, a_3 skapar parallell-epipeden till höger

$W(a_1, a_2, a_3)$ = Volymen. Men om vektorerna är negativt orienterade blir Volymen negativ.

Df:

$$V = \begin{cases} W(a_1, a_2, a_3) & \text{om pos. orient.} \\ -W(a_1, a_2, a_3) & \text{om neg. orient} \end{cases}$$

$$\boxed{V(a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

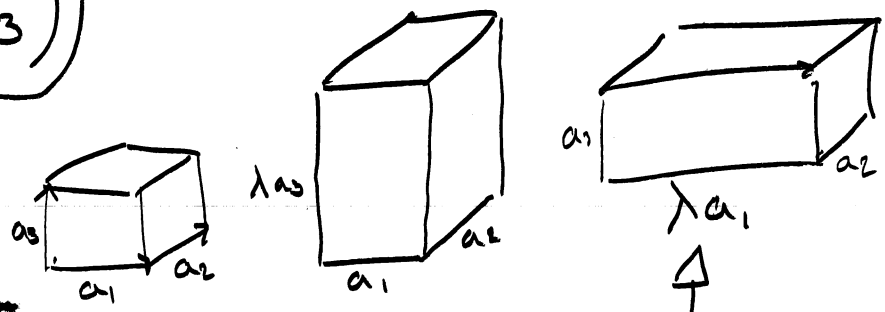
Bra grej att minnas:

$$\boxed{V(\lambda a_1, a_2, a_3) = V(a_1, \lambda a_2, a_3) = V(a_1, a_2, \lambda a_3)}$$

Detta är också lika med

$$\boxed{\lambda V(a_1, a_2, a_3)}$$

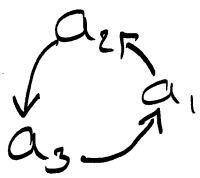
TÄNK SÅHÄR



Samma volym

Om två vektorer byter plats så byts tecknet på V.

$$\boxed{V(a_1\ a_2\ a_3) = -V(a_2\ a_1\ a_3)}$$

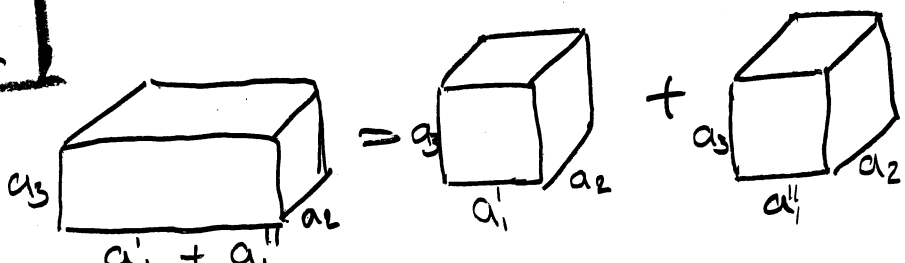


TÄNK SÅHÄR

Om man byter ordningsföljd växlar orienteringen mellan positiv och negativ. testa med handen

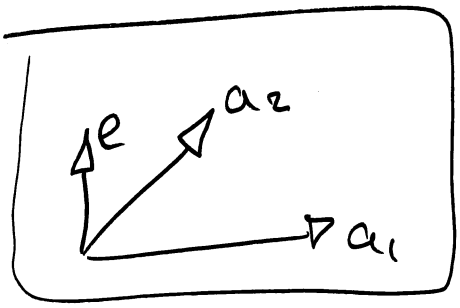
$$\boxed{V(a_1' + a_1'', a_2, a_3) = V(a_1', a_2, a_3) + V(a_1'', a_2, a_3)}$$

TÄNK SÅHÄR



om $a_1 = a_2 = a_3$ är $V(a_1, a_2, a_3) = 0$

eftersom, öh, att det inte blir någon jävla parallellepiped.



Beräkna volymen!

$V(a_1, a_2, e) = \boxed{V_a}(a_1, a_2)$ eftersom $|e| = 1$

$\boxed{V_a}$ definierar area med tecken,

om a_1 och a_2 byter plats, gissa vad som händer.

DETERMINANTER

Def

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb$$

$$\det\begin{bmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

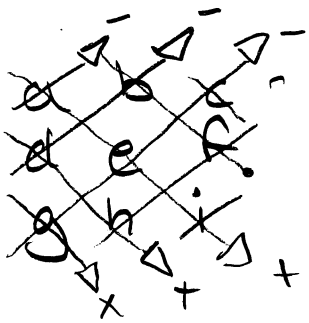
Utveckling efter rad 1, du kan även göra det efter vilken annan rad eller kolonn du vill.

Glöm inte: $\boxed{\text{Tecken} = (-1)^{i+j}}$

Detta kan även förenklas med schackbrädesprincipen:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \ldots \text{ osv.}$$

Du kan använda Sarus regel: (3x3 bara)



Volymsatsen:

$$\boxed{V(a_1, a_2, a_3) = (\det A) \cdot V(e_1, e_2, e_3)}$$

om $e_1\ e_2\ e_3$ är en bas är

$V(e_1\ e_2\ e_3) = 1$! ([redacted])

Transponering

$$\boxed{\det A = \det A^T} \qquad (a, b, c)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Räknelagar

Eftersom $\det A = V(A_1\ A_2\ A_3)$ om

$A_1 =$ kolonnmatris av a_1

$A_2 =$ —— " —— a_2

$A_3 =$ —— " —— a_3

så gäller samma lagar som på sida 38 i sammanfattningen!

Viktigt att fatta är att samma linearitetsegenskaper gäller för såväl rader som kolonner

EXEMPEL PÅ OPERATIONER:

$$\det A = \det(A_1\, A_2\, A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lrcorner + \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\llcorner\!\_\!\_\!\_\!\lrcorner\!\uparrow\ +}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \underset{\circlearrowleft\ \times 2}{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

OVAN är inga "bra" eller "smarta" operationer, mer om sådana senare.

En sista operation: (transponering)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

SATS 5 (s 204)

- Om A är inv-bar och $A \neq 0$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Bevis

$\det I = 1$

$\det(AA^{-1}) = 1$

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Om A är ortogonal är det A

$$\boxed{\det A = 1 \text{ eller } -1}$$

Bevis

$AA^{-1} = I \Leftrightarrow AA^{T} = I \Leftrightarrow \det A \det A^{T} = 1$

$\Leftrightarrow (\det A)^2 = 1$ alltså $\det A = 1$

Adjunkt

SATS 7 s 207

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad D_{11} = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \quad D_{12} = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} \quad \text{osv..}$$

D_{mn} = determinanten för platts m, n.

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

, alltså den TRANSPONERADE matrisen av determinanterna för alla positioner, typ.

I 2×2-matriser går detta sätt fortare, i mxm-matriser $m > 2$ så går gauss fortare.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} D_{11} & \\ D & D_{12} \end{bmatrix}$$

CRAMERS REGEL

$$A = [A_1 \; A_2 \; A_3]$$

OM $AX = Y$ så har varje Y den entydiga lösningen:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det(Y \; A_2 \; A_3)}{\det A} \\[2ex] x_2 = \dfrac{\det(A_1 \; Y \; A_3)}{\det A} \\[2ex] x_3 = \dfrac{\det(A_1 \; A_2 \; Y)}{\det A} \end{cases}$$

Cramers regel är efterbliven, till för att göra matte svårare än det behöver vara.

Tydligen bra om man har parametrar

HUVUDSATSEN (utantillkunskap, nu!)

DESSA VILLKOR E EKVIVALENTA:

(a) A:s kolonnvektorer utgör en bas

(a') A:s radvektorer utgör en bas

(b) $AX = 0$ har <u>bara</u> triviala lösn $X = 0$

(c) $AX = Y$ är lösbart för alla Y

(d) A är inverterbar

(e) linjära avbildningar med avbildnings-matrisen A är bijektiva

(f) $\det A \neq 0$

Bevis: Boken (s. 1-211)

SATS 10

För linjära ekvationssystemet $AX=Y$ gäller:

	Homogena system	Inhomogena system
$\det A=0$	det finns icke-triviala lösningar	0 eller ∞ många lösningar
$\det A\neq 0$	det finns BARA den triviala lösningen	ENTYDIG LÖSNING!

$AX=0 \leftarrow$ Homogent

$AX=Y \leftarrow$ Inhomogent

Ex

Bestäm alla värden på a då $AX=Y$ saknar lösning.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_3 = 3 \\ -3x_1 - x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2$$

$a=1$ ger vid insättning ∞ lösningar

$a=2$ ger vid insättning inga lösningar

$\boxed{\text{Svar: } a=2}$ #

DETERMINANTER OCH LINJÄRA AVBILDNINGAR

$$\boxed{V\left(F(b_1), F(b_2), F(b_3)\right) = (\det A)\, V(b_1, b_2, b_3)}$$

Volymen för vektorerna $F(b_1), F(b_2)\ F(b_3)$ är det samma som determinanten för avbildningsmatrisen för F gånger volymen för $b_1\ b_2\ b_3$ eftersom att:

om $F(b_1), F(b_2)\ F(b_3)$ beskrivs av kolonnmatriserna $AB_1\ AB_2\ AB_3$ gäller:

$$(AB_1\ AB_2\ AB_3) = AB$$

produktregeln + volymsatsen ger:

$$V\left(F(b_1), F(b_2), F(b_3)\right) = \det AB \cdot V(e_1, e_2, e_3) =$$

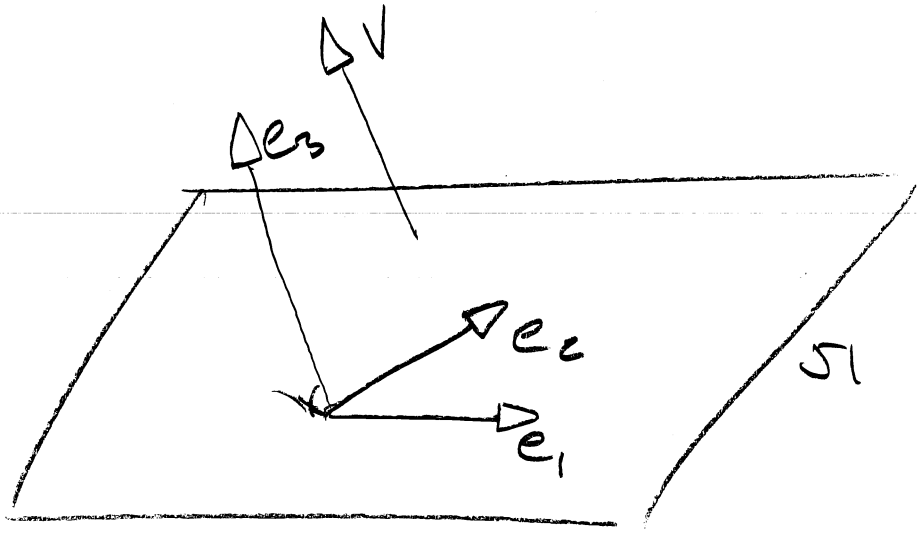
$$= \det A \det B\, V(e_1, e_2, e_3) =$$

$$= \boxed{\det A \cdot V(b_1, b_2, b_3)}$$

KAPITEL 10

EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

$\pi \parallel e_1$
$\pi \parallel e_2$
$e_3 \parallel v$



Vid projektion på π avbildas e_1 och e_2 på sig själva medan e_3 avbildas på nollvektorn.

$$\boxed{F(e_1) = e_1 \quad F(e_2) = e_2 \quad F(e_3) = 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e_1 och e_2 är alltså egenvektorer till avbildningsmatrisen A.

DEFINITION

Mat A är en $n \times n$-matris.

Om skalären λ och kolonnmatrisen X uppfyller

$$\boxed{AX = \lambda X \text{ där } X \neq 0}$$

sägs X vara egenvektor och λ vara egenvärde till A!

(X avbildas alltså på sig själv)

$\boxed{F(x) \parallel x}$ — Tänk på det...

MAGI NEDAN

$$AX = \lambda X$$
$$\Updownarrow$$
$$AX - \lambda X = 0$$
$$AX - \lambda I X = 0$$
$$\boxed{(A - \lambda I)X = 0} \quad *$$

eller

$$AX = \lambda X$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda X - AX = 0$$
$$\lambda I X - AX = 0$$
$$\boxed{(\lambda I - A)X = 0} \quad *$$

$$\boxed{(A - \lambda I)X = 0} \iff \boxed{(\lambda I - A)X = 0}$$

Formlerna * från förra sidan av
används för bestämning
egenvärden och egenvektorer.

$(\lambda I - A)X = 0$ ⟵ Homogent

Enl. huvudsatsen:
om $BX = 0$ och $(\det B) = 0$ har det
homogena linjära ekvationssystemet
icke trivial lösning för X.

Låt $B = \lambda I - A$

det $B = \boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$ ⟹ icke trivial lösn. för X.

Man får ut n st λ som är egen-
värden till X
λ:na bildar diagonalmatrisen $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Valfri ordning på λ-orna!

NÄSTA SIDA (duh)

Vid insättning av $\lambda_1 \dots \lambda_n$ i $(\lambda I - A)X = 0$ så får man ut värden på X, dessa $S_1 \dots S_n$ är egenvektorer,

kolonnmatriser

$$S = [S_1 \; S_2 \dots S_n]$$

$S_1 \dots S_n$ kan sättas i valfri ordning.

Nu har vi ett samband:

$$\boxed{SD = AS}$$

PK-regeln

Om uppgiften är att du ska diagonalisera matrisen gör du så att du räknar ut S och D och ställer upp sambandet ovan.

Förresten:

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)}$$

$P_A(\lambda)$ kallas det karaktäristiska polynomet.

VIKTIGT EXEMPEL ①

om $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

så blir $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$

$\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$ ger vid insättning: $X = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \neq 0$

men vid $\lambda = 1$ ges

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

linjärkombination

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

istället för att sätta in parametrar svarar man att alla vektorer planet $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$ är egenvektorer till A!!

$$\cancel{A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 4}$$

$$\boxed{\text{NU SKA VI RÄKNA } A^{1337} \text{ !!}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 10}, \boxed{\lambda_2 = 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{S_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D}$$

$$SD = AS \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

$$A^3 = SD\underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I}D\underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I}DS^{-1} = SDDDS^{-1} = \boxed{SD^3S^{-1}}$$

På samma sätt:

$$\boxed{A^{1337} = S \begin{bmatrix} 10^{1337} & 0 \\ 0 & 4^{1337} \end{bmatrix} S^{-1}}$$

TACK FÖR MIG
OCH
LYCKA TILL!

MAX LINDQVIST