Sammanfattning B1

$\mathbb{R} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}: \pi, \sqrt{\ }, e, \ldots$ $\mathbb{Z}: +, \times, -$

$\mathbb{Q}: +, -, \times, a/b$ $\mathbb{N}: +, \times$

$A \Rightarrow B$ om A är sann så är B också sann

$A \Leftrightarrow B$ sann åt båda håll

Enpunktsformeln $y - y_0 = k(x - x_0)$ Tvåpunktsformel $y - y_0 = \frac{y - y_0}{x - x_0}(x - x_0)$

Potenslagar

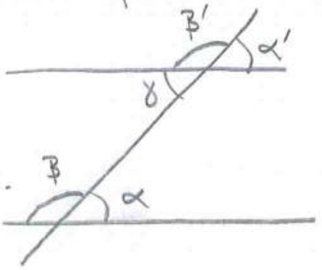
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $(x^a)^b = x^{ab}$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$

axiom - påstående som antas stämma (ej bevisat)

definition - "överenskommelse" ex gränsvärde

sats - påstående som har bevis

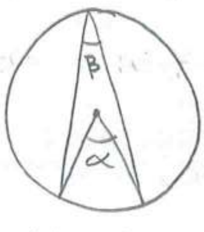


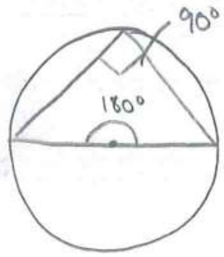
- β', α' = sidovinklar $\beta' + \alpha' = 180°$
- γ, α' = vertikalvinklar $\alpha' = \gamma$
- α', α = likbenägna vinklar $\alpha' = \alpha$
- γ, α = alternatvinklar $\gamma = \alpha$

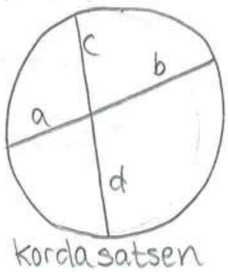
Beteckningar

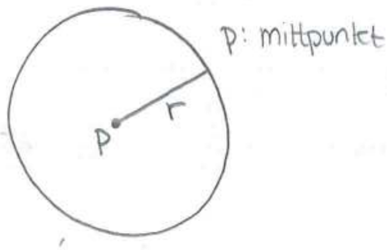
* $\cong$ kongruens * $\perp$ vinkelrät
* $\sim$ likformighet * $\parallel$ parallell

Kongruens: VSV, SVS, SSS
Likformighet: SSS, SVS, VV.









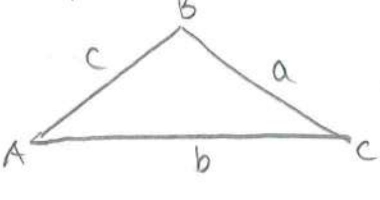
randvinkelsatsen

$2\beta = \alpha$

Kordasatsen

$a \cdot b = c \cdot d$

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$



Areasatsen

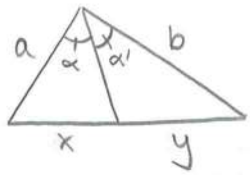
$\text{Area}_\Delta = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$

Sinussatsen

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A$

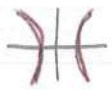
Bisektrissatsen



$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ om $\alpha = \alpha'$

Cirkelns ekvation: $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$

Ellips: $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$ om $a=b$ är det en cirkel halvaxlar a och b

Hyperbel: $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$  -1 

asymptoter: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

Logaritmlagar $*\ {}^{a}\log 1 = 0$ $*\ {}^{a}\log x^b = b \cdot {}^{a}\log x$ $*\ {}^{a}\log s = \frac{{}^{a}\log s}{{}^{a}\log b}$

$*\ {}^{x}\log (a \cdot b) = {}^{x}\log a + {}^{x}\log b$

$*\ {}^{x}\log \left(\frac{a}{b}\right) = {}^{x}\log a - {}^{x}\log b$

Aritmetisk summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Geometrisk summa

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Binomialsatsen

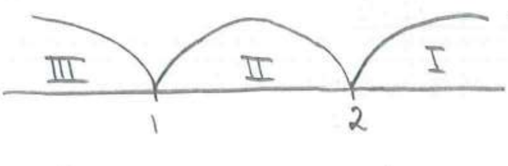
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

$$\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Absolut belopp

ex. $|x-1| + |x-2| = 2$

$x<1$ $\quad 1 \leq x \leq 2$ $\quad x>2$



Svar: $x = \frac{5}{2}$ $\quad x = \frac{1}{2}$

Fall I: $x \geq 2 \Rightarrow x-2=0$ och $x-1 \geq 0$

$x-1+x-2 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} > 2$ Ok!

Fall II $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x-2<0$ och $x-1 \geq 0$

$x-1-x+2 = 2$ $\quad 1=2$ lösning saknas

Fall III $x<1$ $\quad x-1<0$ och $x-2<0$

$-(x-1)-(x+2) = 2 \Leftrightarrow -x+1-x-2 = -2x-1$

$\Leftrightarrow -2x = 3$ $\quad x = \frac{-3}{2} < 1$

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$ $\qquad$ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$A \sin(x + \varphi)$ $\quad$ A: amplitud $\quad$ φ = fasförskjutning

Standardgränsvärden

1. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$
2. $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad$ a reellt
3. $\lim_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
4. $\lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e$
5. $\lim_{n \to 0} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$
6. $\lim_{n \to 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$

Asymptoter

$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ $\qquad$ $m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

Derivator

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad a > 0$ konstant

$({}^a\log x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad a > 0 \quad a \neq 1$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

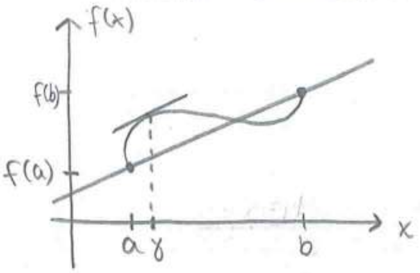
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Medelvärdessatsen



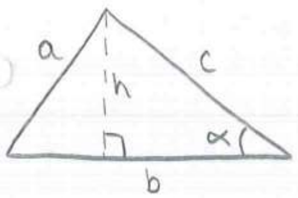
$$f'(\gamma)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

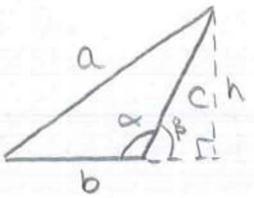
Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ och deriverbar på det öppna intervallet $]a,b[$. Då finns det (minst) en punkt γ $a<\gamma<b$ sådan att

$$f'(\gamma)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bevis av area- sinus- och cosinussatsen

Areasatsen $A_\Delta=\frac{bc}{2}\cdot\sin\alpha$





α kan vara både trubbig / spetsig.

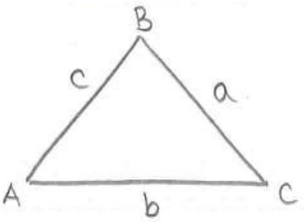
I det spetsiga fallet: $h=c\cdot\sin\alpha$

I det trubbiga fallet: $h=c\sin\beta$
$=c\sin(180^\circ-\alpha)=$
$c\sin\alpha$

I Båda fallen är arean av triangeln

$$A_\Delta=\frac{bh}{2}=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}$$

Sinussatsen



$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$ tillämpa areasatsen på de tre vinklarna i triangeln

$$A_\Delta=\frac{ab}{2}\cdot\sin C=\frac{ac}{2}\cdot\sin B=\frac{bc}{2}\cdot\sin A$$

multiplicera varje led med $\frac{2}{abc}$

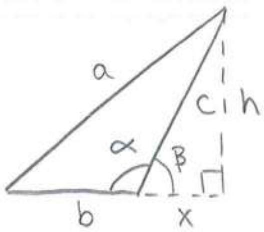
$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{ab}c}\cdot\frac{\cancel{ab}}{\cancel{2}}\cdot\sin C=\frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\cancel{2}}{a\cancel{bc}}\cdot\frac{\cancel{bc}}{\cancel{2}}\cdot\sin A=\frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\cancel{ac}}{\cancel{2}}\cdot\sin B\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}b\cancel{c}}=\frac{\sin B}{b}$$

V.S.V.

Cosinussatsen $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$



då α är trubbig

$h=c\cdot\sin\beta=c\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=c\cdot\sin\alpha$ $\quad x=c\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=-c\cos\alpha$

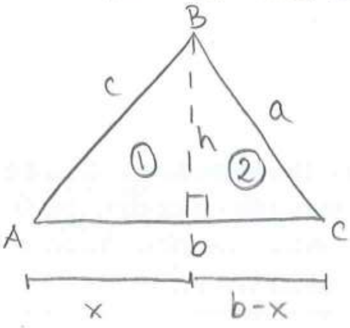
pythagoras sats på den rätvinkliga triangeln i båda

$x^2+h^2=c^2$ $\quad a^2=h^2+(b+x)^2=c^2\cdot\sin^2\alpha+(b-c\cos\alpha)^2$

$=c^2\sin^2\alpha+b^2-2bc\cos\alpha+c^2\cos^2\alpha=$

$$b^2+c^2\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{=1}-2bc\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Bevis av cosinussatsen då alla vinklar är spetsiga



$$\left.\begin{array}{l} ① \quad x^2+h^2=c^2 \\ ② \quad h^2+(b-x)^2=a^2 \end{array}\right\}$$ enligt pythagoras sats

$\frac{h}{c}=\sin A \qquad h^2=c^2-x^2 \qquad \frac{x}{c}=\cos A$

enligt triangel ①

Insättning i ② $\quad c^2 \cancel{-x^2}+b^2-2bx \cancel{+x^2}=a^2$

$$a^2=b^2+c^2-2bx = \underbrace{b^2+c^2-2bc\cdot\cos A}_{\text{cosinussatsen}}$$

VSV.

Hjälpvinkelmetoden

$$a\sin\omega x + b\cos\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\omega x+\varphi)$$

---

2 november 2015 Endim B2
Föreläsning 1 Lv1
Kap 6

6,1 Ekvationen $x^2=-1$ har ingen reell lösning. Vi inför den imaginära enheten $i=\sqrt{-1}$ som uppfyller $i^2=-1$

Ett komplext tal z kan skrivas som

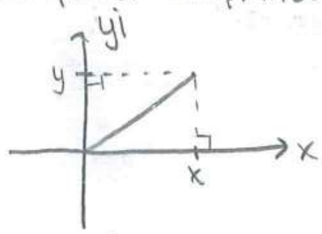
$z=x+yi$, där x och y är reella tal.

Skriv. $Re(z)=x$ som kallas realdelen av z
$Im(z)=y$ som kallas imaginärdelen av z

Ex. $Re(3-4i)=3$
$Im(3-4i)=-4$

Ett reellt tal kan betraktas som ett komplext tal.

Komplexa talplanet



Ett komplext tal $x+yi$ svarar mot endast en punkt (x,y) (eller ortsvektor till punkten (x,y))