Föreläsning 11 / seminarium 1

Repetition 1

① Tidsdiskreta system

ⓐ Den homogena rekursionsformel

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

har lösningar $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^k \bar{s}_1 + c_2 \lambda_2^k \bar{s}_2$ (vi antar att A är diagonaliserbar)

ⓑ Den inhomogena formeln

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

← konstant

har lösningar $\bar{v}_k = \bar{v}_k^h + \bar{v}_k^p$

där $\bar{v}_k^p = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Obs $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

② Tidskontinuerliga system

ⓐ $\bar{x}' = A\bar{x}$

har en allmän lösning

$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{s}_2$

ⓑ $\bar{x}' = A\bar{x} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} e^{st}$ tal

har lösningar $\bar{x}(t) = \bar{x}_h(t) + \bar{x}_p(t)$

där $\bar{x}_p(t) = (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} e^{st}$

③ Faktum om diagonaliserbara matrisen A

ⓐ Sats 3.6. $A_{n \times n}$ är diag. $\Leftrightarrow$ $A_{n \times n}$ har n st linjärt oberoende egenvektorer.

I så fall har vi $S = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_n) \Rightarrow S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$

(b) A är reell och symetrisk $\Rightarrow$ A är diag.

(c) $A_{n \times n}$ har n st olika egenvärde $\Rightarrow$ $A_{n\times n}$ är diag.

(d) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = tr(A_{n\times n})$

$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = det(A)$

(4) <u>Stabilitet</u>

(a) För tidskontinuerliga system $\sigma(A) = \max_i Re(\lambda_i)$

	$\sigma(A) < 0$	$\sigma(A) = 0$	$\sigma(A) > 0$
$\bar{x}' = A\bar{x}$ för <u>diag A</u>	stabil dvs alla lösningar $\bar{x}(t) \to 0$ då $t \to \infty$	neutralt stabil dvs alla lösningar är begränsade och någon $\bar{x}(t) \not\to 0$ då $t \to \infty$	instabil dvs någon lösning är obegränsad
$\bar{x}' = A\bar{x}$ för alla A	stabil	neutralt stabil / instabil	instabil
$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t)$	insignal-utsignal stabil, dvs begränsad insignal ger begränsad utsignal $\bar{x}(t)$	icke insignal-utsignal stabil	icke insignal-utsignal stabil

(b) <u>För tidsdiskreta system</u>.

	$\max_i \lvert\lambda_i\rvert < 1$	$\max_i \lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\max_i \lvert\lambda_i\rvert > 1$
$\bar{v}_k = A\bar{v}_{k-1}$ för diag A	stabil	neutralt stabil	instabil

(5) <u>Matrispotens</u>

$$e^A \ \underline{\text{def}}\ I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

<u>Faktum</u>

(a) $$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \ e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(b) $$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}$$

$$e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}S^{-1}$$

(c) A är diag $\Rightarrow$ Alla element i e^{tA} ser ut:

$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

(d) $\left(e^{tA}\right)' = e^{tA}A = Ae^{tA}$

speciellt $\left(e^{tA}\right)'\big|_{t=0} = A$

(e) $\bar{x}' = A\bar{x}$ har en allmän lösning

$\bar{x}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ godtycklig konst vektor

---

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) (a) Lös $\bar{x}' = A\bar{x}$. Är systemet stabilt? (0,5 p)

(b) Lös $\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t} \\ \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ (0,5 p)

(c) Beräkna e^{tA} (0,5 p)

(d) Lös $\bar{v}_k = A\bar{v}_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ Är systemet stabilt? (0,5 p)

Lösn (a) Egenvärde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$

Egenvektorer:

för $\lambda_1 = -1$, $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ där $t \neq 0$

välj $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

För $\lambda_2 = 5$, $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ välj $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Men allmänna lösningen $\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{s}_2 = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ty $G(A) = 5 > 0 \Rightarrow$ Systemet är instabilt

(b) $\bar{x}(t) = \bar{x}_h(t) + \bar{x}_p(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{x}_p(t)$

där $\bar{x}_p(t) = (2I - A)^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2-2 & -3 \\ -3 & 2-2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t}$

$= \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{2t} = \dots = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Men $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{x}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$

Den sökta lösningen är

$$\bar{x}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$$

(c) $S = (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = S\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}S^{-1} = \cdots$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t} + e^{5t} & -e^{-t} + e^{5t}\\ -e^{-t} + e^{5t} & e^{-t} + e^{5t}\end{pmatrix}$$

$$\left(\text{testa: } \left.\left(e^{tA}\right)'\right|_{t=0} \overset{?}{=} A\right)$$

(d) $\bar{v}_k = c_1\lambda_1^k\bar{s}_1 + c_2\lambda_2^k\bar{s}_2 = c_1(-1)^k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 5^k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Ty $\max_i |\lambda_i| = 5 > 1 \Rightarrow$ instabil, ty A är diag.

(b) System S

(a1) S är linjärt $\Leftrightarrow S(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 S(w_1) + c_2 S(w_2)$

(a2) S är L $\Leftrightarrow S(w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)\, w(\tau)\, d\tau$ för alla $w(t)$

(b1) S är tidsinvariant $\Leftrightarrow$ $w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ medför att $w(t-a) \xrightarrow{S} y(t-a)$ för alla a

(b2) S är LTI $\Leftrightarrow S(w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau = h * w(t)$

för alla $w(t)$ där impulssvaret $h(t) = S(\delta(\tau))(t)$

$= \left(S(\theta(\tau))(t)\right)'$

(c1) S är insignal-utsignal stabil $\Leftrightarrow$ varje begränsad insignal

ger begränsad utsignal.

(c2) För LTI system S gäller:

S är IU-stabil $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

(d1) För linjära system S gäller:

S är kausalt $\Leftrightarrow$ för varje t_0 och alla $w(t)$ med

$w(t) = 0$ för $t < t_0$ har vi $S(w(\tau))(t) = 0$ då $t < t_0$

(d) För LTI systemet S gäller

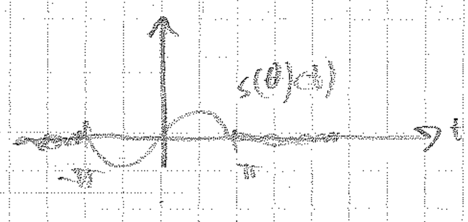
S är kausalt $\Leftrightarrow$ $h(t)$ är kausal dvs $h(t)=0$ där $t<0$

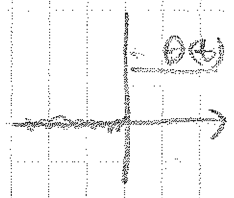
Ö28 Antag att LTI system S har stegsvaret $S(\theta)(t) = (\theta(t+\pi) - \theta(t-\pi))\sin\theta$

a) Är S kausalt?

b) Är S IU-stabil? $\Big\}$ (0.5 p)

Lösn (a)





$\theta(t) = 0$ då $t < t_0 = 0$

Men $S(\theta)(t) \neq 0$ för $t = -\frac{\pi}{2} < t_0$

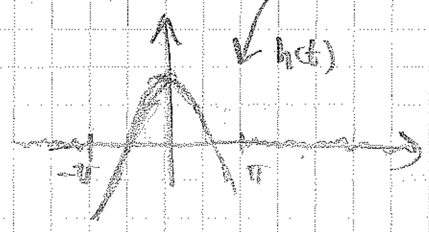
Detta medför att S är inte kausalt

(b) $h(t) = (S(\theta)(t))' = \left[(\theta_{-\pi}(t) - \theta_{\pi}(t))\sin t\right]'$

$= (\delta_{-\pi}(t) - \delta_{\pi}(t))\sin t + (\theta_{-\pi}(t) - \theta_{\pi}(t))\cos t$

$= \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\delta_{-\pi}(t) - \underbrace{\sin\pi}_{0}\delta_{\pi}(t) + (\theta_{-\pi}(t) - \theta_{\pi}(t))\cos t$

som är absolut integrerbar



dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

$\therefore$ S är IU-stabil