REPETITION B2

Kapitel 6

Räkneregler för komplexa tal

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2|$ = avstånd mellan punkterna z_1 z_2

$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$ $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ polära formen av talet z.

$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$|e^{i\theta}| = 1$ ← reellt ty, $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta|$

$= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-\theta i}$

de Moivres formel

$(e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$ för alla heltal n $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ } Eulers formel

Komplexa ekvationer

$z^n = z_0$ $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ så gäller $z_k = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta_0 + 2\pi k}{n}}$ för alla $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Sats 6,2

Algebrans fundamentalsats Varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter har minst ett komplext nollställe

Sats 6,3 Ett polynom av graden n har precis n stycken nollställen

Sats 6,4 Antag att polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och att α är ett nollställe till $p(z)$. Då är även konjugatet ett nollställe till $p(z)$

Kapitel 12

Primitiva funktioner

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

om negativ så arccos x

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

om negativ så arccot x

$$\boxed{\text{Kom ihåg}\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C}$$

Partialintegrativ

Bevis $(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$

Då gäller

$$\int (F(x)g(x))'\,dx = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

$$\int \big(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\big)\,dx = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

Så sätter vi högerleden lika

$$\int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx = F(x)g(x) + C$$

så får vi till slut

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Partialbråksuppdelning

* Ansätt en funktion av graden mindre än graden i nämnaren.

Trigonometriska funktioner

Exempel på jämna potenser av sin x / cos x

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$$

Exempel på udda potenser av sin x / cos x

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \int (1-t^2)^2\,dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

Kapitel 13

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Räknelagar för integraler

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \quad \alpha \text{ konstant}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Sats 13,5 Integralkalkylens medelvärdessats

Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Då finns det (minst) en punkt ξ, $a \leq \xi \leq b$ sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

Sats 13,6 Analysens huvudsats - Antag att funktionen f är kontinuerlig på det öppna intervallet I, och att $a \in I$

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in I$$

Funktionen är då deriverbar med derivatan $S'(x) = f(x)$. Med andra ord, S är en primitiv funktion till f.

Vid variabelbyte

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \quad \text{där } \alpha = g(a) \quad \beta = g(b)$$

Partialintegration

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[F(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Integral över obegränsat intervall. Antag att funktionen f är definierad på intervallet $[a, \infty[$ och integrerbar på $[a, X]$ på varje $X > a$

Om gränsvärdet $\lim_{X \to \infty} \int_a^X f(x)\,dx = A$ om gränsvärdet existerar ändligt så är den generaliserade integralen konvergent med värdet A.

Divergent om gränsvärde saknas

Sats 13,11

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergent} \iff \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergent} \iff \alpha < 1$$

Om $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ så är $\int_a^\infty f(x)\,dx$ och $\int_a^\infty g(x)\,dx$ båda konvergenta eller båda divergenta

Sats 13,14 Cauchys integralkriterium

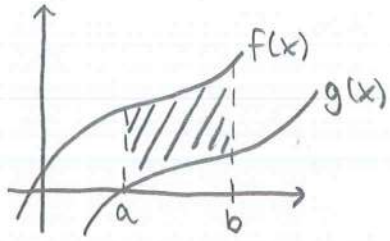
Antag att funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande för $x \geq 1$ samt integrerbar på $[1, x]$ för varje $x > 1$. Då är serien och den generaliserade integralen

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ respektive $\int_1^{\infty} f(x)dx$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Kapitel 14

Area

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$



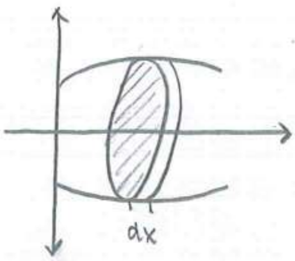
Volym

$$V = \int_K dV = \int_K A(x)dx$$

Denna formel gäller för alla pyramid/ konformade kroppar

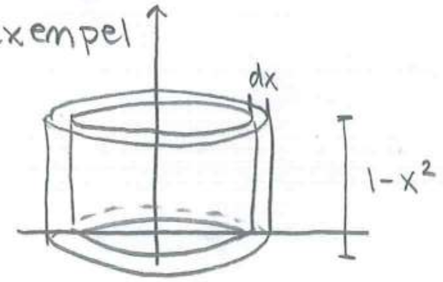
$$V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2} x^2 dx = \frac{b^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{b^2 h}{3}$$

Skivformeln



Volym: $\pi f(x)^2 dx \Leftrightarrow \int \pi f(x)^2 dx$

exempel



$$V = \int_K dV = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx}$$

Massa och tyngdpunkt

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = \int_K dm = \int_K \rho \, dV$$

Tyngdpunkt

$$x_T = \frac{1}{m} \int x \, dm$$

Kurvor på polär form

$$L = \int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \, d\theta$$

Kurvlängd och rotationsarea

$$L = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

Längd av funktionskurva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Area av rotationsyta

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Kapitel 15

Ekvationer av första ordningen

Linjära ekvationer

$a(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$ Hitta den integrerande faktorn

integrera denna för integrerande faktor

$\int b(x)\,dx = B(x)$ detta är den integrerande faktorn

$\underline{\underline{a(x)=1}}$ $y' + g(x)y = h \iff y'e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = he^{G(x)}$

$$\left(ye^{G(x)}\right)' = y'e^{G(x)} + G'(x)ye^{G(x)} = y'e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)}$$

Vi får slutligen

$$y'e^{G(x)} + g(x)ye^{G(x)} = h(x)e^{G(x)} \iff \left(ye^{G(x)}\right)' = h(x)e^{G(x)}$$

$$\iff ye^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)} \, dx \iff y = \frac{1}{e^{G(x)}} \int h(x) e^{G(x)} \, dx$$

Separabla ekvationer

$$g(y(x)) \cdot \underbrace{y'(x)}_{\frac{dy}{dx}} = h(x) \iff g(y(x))\,dy = h(x)\,dx$$

$$\int g(y(x))\,dy = \int h(x)\,dx$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots \qquad -1 < x < 1$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Ekvationer av andra ordningen

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$ allmän lösning $y(x) = y_p + y_h$

Homogen lösning

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad r^2 + ar + b = 0$$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} & r_1 = r_2 \end{cases}$$

Partikulär lösning

Fall I $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$

Fall II $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)e^x$

Fall III $\quad y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)\cos x \quad (\sin x)$

Kapitel 11

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(x)}{2}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ för något ξ mellan 0 och x

Sats 11,3

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$