Repetition 3 2015-12-18

Kap 11. 1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

för ngt $0 < \theta < 1$

som ger $\left| f(x) - p_n(x) \right| = \left| R_{n+1}(x) \right|$

2) Memorera Maclaurinpolynom till $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$

sidan 266 i boken

dvs. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$ $\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

3) l'Hopitals regel

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lösning med l'hôpital

ex. Beräkna $A = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax - \ln(1+2x)}{e^{ax} - 1 - 2x + 2x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a\cos x - \frac{2}{1+2x}}{ae^{xa} - 2 + 4x} = \frac{a-2}{a-2}$

för alla a

$= 1$

använd l'hôpital eller maclaurin

derivera båda leden

detta gäller för alla $a \neq 2$

För $a=2$ gäller $A = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - \frac{2}{1+2x}}{2e^{2x} - 2 + 4x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x + 2(1+2x)^{-2}2}{4e^{2x} + 4}$

$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Alt. Lösning med maclaurinpolynom

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\left[ax - \frac{(ax)^3}{3!}\dots\right] - \left[2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \dots\right]}{\left[1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!}\dots\right] - 1 - 2x + 2x^2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{(a-2)x + \dots}{(a-2)x + \dots} \text{ då } a \neq 2 = \lim_{x\to 0} \frac{a-2+\dots}{a-2+\dots} = \frac{a-2}{a-2} = 1 \\ \text{då } a = 2 \\ \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \dots}{4x^2 + \dots} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2 B(x)$

Visa att

$$\Big| \underbrace{\sqrt{1+x}}_{f(x)} - \underbrace{(1+\tfrac{1}{2}x)}_{p_1(x)} \Big| \leq \frac{1}{8}x^2 \quad \text{för } x \geq 0 \qquad 0{,}5\text{p}$$

Bevis. Skriv $f(x) = \sqrt{1+x} \implies f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \implies f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 \cdot 1$$

$\because\ p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x$

$$\because\ \left|\sqrt{1+x} - (1+\tfrac{x}{2})\right|$$

$$= |f(x) - p_1(x)| = |R_2(x)|$$

$$= \left| \frac{f''(\theta x)}{2!} x^2 \right| = \left| \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}} \right| \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{8}$$

↑ kvoten är < 1 ty nämnaren är > 1

Kap 15.

1) Första ordningens diffekvation

1,1. $y' + g(x)y = h(x)$ har en allmän lösning $y(x) = e^{-G(x)} \int e^{G(x)} h(x)\,dx$

där $G(x) = \int g(x)\,dx$ utan C.

1,2 $f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$ dvs. $y' = f_1(x) f_2(y)$ har allmän lösning $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

1,3 Integralekvationen $y(x) = \int_a^x f(t)y(t)\,dt \iff \begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot y(x) \\ y(a) = \cancel{\int_a^a} = 0 \end{cases}$

dvs. $y' = f(x) \cdot y$

Ex. Lös $\begin{cases} (1-x)y' = y - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Lösning: Metod 1 $(1-x)y' - y = -2$

$$y' - \frac{1}{1-x}y = -\frac{2}{1-x}$$

$$G(x) = \int -\frac{1}{1-x}\,dx = |\ln x-1| = |\ln 1-x| = \ln(1-x)$$

$$y(x) = e^{-\ln|1-x|} \int e^{\ln 1-x} \cdot \frac{-2}{1-x}\,dx = \frac{1}{1-x}\int -2\,dx = \frac{1}{1-x}(-2x+C)$$

Men $0 = y(0) = \frac{1}{1-0}(0+C) \implies C = 0 \qquad y(x) = \frac{-2x}{1-x}$

2) Andra ordningens diff. ekvationer

konstanter

2,1 $y'' + ay' + by = h(x)$ har allmän lösning $y = y_h + y_p$

karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har lösningar r_1 o r_2 $\Rightarrow$

$y_h(x) = \begin{cases} \text{då } r_1 \neq r_2 \text{ reella} \\ C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ \text{då } r_1 = r_2 \text{ reella } (C_1 + C_2 x) e^{rx} \\ \text{då } r_1 = \alpha + \beta i \text{ o } r_2 = \alpha - \beta i \\ \text{då får vi } e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + \sin \beta x) \end{cases}$

2,2 Partikulärlösningar $y_p(x) = \begin{cases} \text{då } h(x) \text{ är ett polynom} \\ b \neq 0 \; y_p(x) \text{ är samma grads polynom} \\ \quad h(x) \text{ är ett polynom.} \\ b = 0 \; a \neq 0 \Rightarrow y_h = x \cdot \text{samma grads polynom} \\ b = 0 \; a = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \text{samma grads polynom} \end{cases}$

$h(x) = \text{polynom} \cdot e^{kx} \Rightarrow$ sätt att $y = z(x) \cdot e^{kx}$

$h(x) = \sin kx$ eller $\cos kx$

$\Rightarrow$ Hitta en $y_p = y_{p1} + i\, y_{p2}$ till $y'' + ay' + by = e^{ikx}$

$h(x) = h_1(x) + h_2(x) \Rightarrow y = y_{p1} + y_{p2}$ där y_{p1} är en partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_1(x)$
och $y_{p2} = \cdots h_2(x)$

Lös $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = x + e^x \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad y_h(x)$: $r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 2$

$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$

$y_p(x) =$ Vi kollar $y'' - 4y' + 4y = x$ $\quad y_{p1}(x) = Ax + B$ $\quad$ Insättning ger

↑ty $b = 4 \neq 0$

Vi kollar $y'' - 4y' + 4y = e^x$ $\qquad A = ? \qquad B = ?$

sätt $y = z(x)\, e^x$, Insättning