Repetition 2 2015-12-14

1) $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$

2) Integralkalkylens medelvärdessats

$f(x)$ är kontinuerlig i $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$ för ngt $a \leq c \leq b$

3) Analysens huvudsats $f(x)$ är kontinuerlig i $[a, b] \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ för alla $a < x < b$

4) $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))g'(x)$

5) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)$ $\quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ konv. $\Leftrightarrow \alpha > 1$ $\quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ konv. $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Jämförelsetest

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \quad 0 < A < \infty$ $\quad \int_a^\infty f(x)dx$ och $\int_a^\infty g(x)dx$

konvergerar samtidigt eller divergerar samtidigt.

$f(x)$ och $g(x)$ är positiva
$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = A$
$\Rightarrow 0 < A < \infty$ samma resultat

6) $f(x)$ är positiv och kontinuerligt avtagande $[1, n[\Rightarrow$

$$\int_1^n f(x)dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx + f(1)$$

Ex. extentauppgift

Bestäm Maclaurinpolynomet $p_1(x)$ till $f(x) = (3+x)\int_x^{x^2} e^t \cos t\,dt$

Lösning: $p_1(x) = f(0) + f'(0)x$

Vi vet att $f(0) = (3+0)\int_0^0 e^t \cos t\,dt = 0$ och $f'(x) = \int_x^{x^2} e^t\cos t\,dt + (3+x)\cdot(e^{x^2}\cdot\cos(x^2)\,2x - e^x\cdot\cos x\cdot 1)$

som ger: $f'(0) = 0 + (3+0)(0-1) = -3$

$\therefore p_1(x) = 0 + (-3)x = -3x$

Är $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx$ konvergent? Om den är konvergent, beräkna dess värde.

Lösning: $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx$ Men $\displaystyle\frac{x-8}{x^3+4x} = \frac{x-8}{x(x^2+4)}$

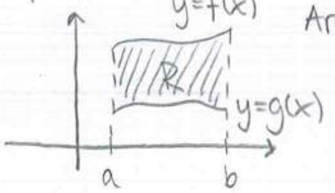
$$= \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \frac{x-8}{x^3+4x}\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-2\ln|x| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^x =$$

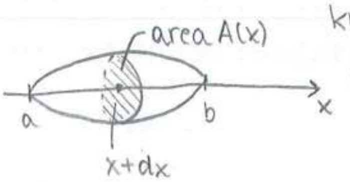
$$\lim_{x\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_2^x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2}\arctan 1$$

kap. 14

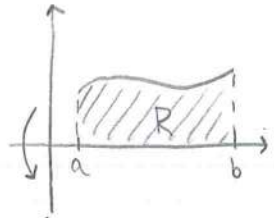
1) 

Arean av $R = \displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$

Rotationsvolymen då R roterar runt x-axeln $= \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx - \pi\int_a^b g^2(x)\,dx$

2) 

kroppens volym $= \displaystyle\int_a^b A(x)\,dx$

3) 

Rotationskroppens volym ur R runt x-axeln

$$= \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Rotationsvolymen ur R runt y-axeln $= 2\pi\displaystyle\int_a^b x|f(x)|\,dx$ där $0<a<b$

4) Massa $dm =$ densitet $\begin{cases} (\text{längden})\,dl & \text{för tråd.} \\ (\text{arean})\,dA & \text{för platta} \\ (\text{volymen})\,dV & \text{för kropp} \end{cases}$

5) Längden av kurva
a) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$ dvs $x(t), y(t)$ där $\alpha \leq t \leq \beta$

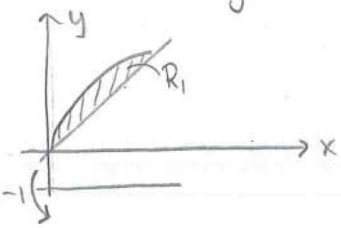
är $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

b) Längden av kurvan $y=f(x)$, där $\alpha \leq x \leq \beta$ är $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

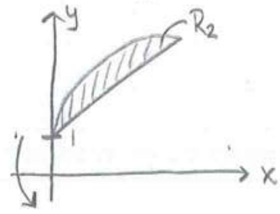
ex extentauppgift

Beräkna volymen av rotationskroppen R_1 då den roteras runt linjen

$y=-1$



Lösning:



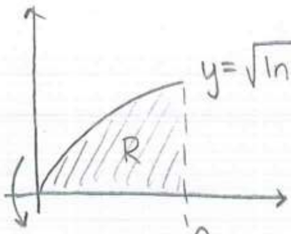
(0,6p)

Två rotationskroppar med samma volym.

$\therefore$ Deras volym $= \pi\int_0^1 (\sqrt{x}+1)^2 dx - \pi\int_0^1 (x+1)^2 dx$

$$\Rightarrow \pi\int_0^1 (\sqrt{x}+1)^2 - (x+1)^2\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Ex.



(1,0p)

densitet $= \rho_0$ konstant

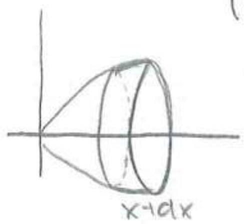
Masscentrumet (x_T, y_T, z_T)

klot $y_T = z_T = 0$ ur symmetri och konstant densitet.

Lösning: $x_T = \dfrac{\int x\, dm}{\int dm}$

Total massa = konstant densitet hela volym

total massa



$A(x)$ $dm = \rho_0 dV = \rho_0 A(x) dx = \rho_0 \pi \cdot f^2(x) dx$

$$x_T = \frac{\int_0^1 x \rho_0 \pi f^2(x) dx}{\int_0^1 \rho_0 \pi f^2(x) dx}$$