Repetition ① 2015-10-21

Kap 2

① Kunna kvadratkomplettering och faktorisering

t.ex. $x^2-5x+6 = x^2 - 2\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$

$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

② Faktorisering: $x^2-5x+6 = \ldots = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left[x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right]\left[x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right]$

$= (x-3)(x-2)$

Alt. två nollställen

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

③ Kunna polynomdivision

t.ex. $\frac{2x^2+1}{x+1} = \text{kvot} + \frac{\text{rest}}{x+1}$ eller $2x^2+1 = \text{kvot}\cdot(x+1) + \text{rest}$

$$\begin{array}{l|l} \quad 2x - 2 & \\ \hline 2x^2 + 1 & x+1 \\ -(2x^2+2x) & \\ \hline \quad -2x+1 & \\ \quad -(-2x-2) & \\ \hline \qquad 3 & \end{array}$$

3 ← rest

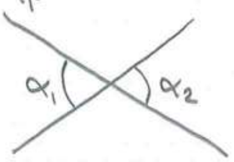
kvot $= 2x-2$
rest $= 3$

④ Konjugat- och kvadreringsregel

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

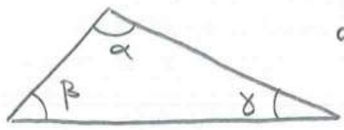
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Kap P

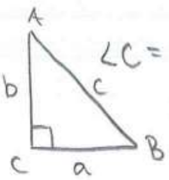
① 

$\alpha_1 = \alpha_2$

② Kongruensfall SSS, VSV, SVS

③ 

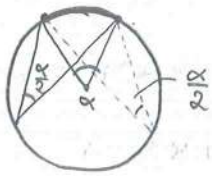
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

④ 

$\angle C = 90°$ $a^2+b^2=c^2$

⑤ Likformighetsfall SSS, SVS, VV

⑥ Randvinkelsatsen



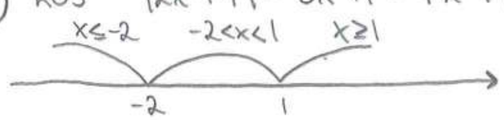
Kap 3

① $x^2+px+q=0$ har lösningar

$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

② Kunna lösa ekvationer och olikheter

(0,5p) Lös $|2x+4| - 3x + 1 = |x-1|$



För $x \le -2$ har vi $-(2x+4) - 3x + 1 = -(x-1)$
$\Leftrightarrow x = -1$ falsk, uppfyller ej kravet.

För $-2 < x < 1$ $(2x+4) - 3x + 1 = -(x-1) \Leftrightarrow 1 = 5$ falsk!

För $x \ge 1$ har vi $2x+4-3x+1 = x-1$ $x=3$ Ok!
Klarar likheten!

Kap 4

① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}$ ② $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ för $x \neq 1$

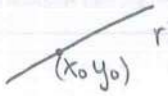
③ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$ ④ Pascals triangel

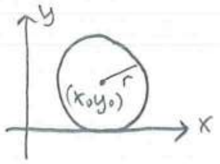
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

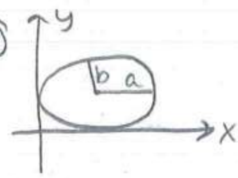
t.ex. Bestäm koefficienten framför x^{17} i utvecklingen av $(1+4x)(2x^4-1)^6 = p(x)$ (0,4p)

Lösning $p(x) = 1 + 4x \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (2x^4)^k (-1)^{6-k}$

Kap A och 5

①  riktningskoefficient k $y - y_0 = k(x - x_0)$

②  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

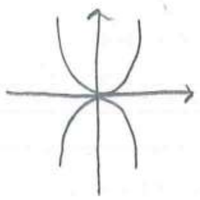
④  $\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$

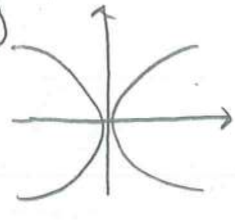
medelpunkt (x_0, y_0)

halvaxlar a o b.

⑤ Hyperbel $y = ax^2$, $a > 0$

$y = -ax^2$ $a > 0$



⑥  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$

asymptoter $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

Beskriv kurvan $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y + 8 = 0$

Lösning: $2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3(y^2 + 4y + 2^2 - 2^2) + 8 = 0$

$2(x-1)^2 - 2 + 3(y+2)^2 - 12 + 8 = 0$ $2(x-1)^2 - 3(y+2)^2 = 6$

$\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ En ellips med medelpunkt i $(1, -2)$ och halvaxlar $a = \sqrt{3}$ o $b = \sqrt{2}$

⑦ $|x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$ $\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = \sqrt{x+2} \Rightarrow |x|^2 = (\sqrt{x+2})^2 \Rightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow x = 2 \quad x = -1$

Kontrollera svar! Måste vara med i lösning!

Kap 7

① $f(x)$ är injektiv $\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ har entydig lösning $x = f^{-1}(y)$

t.ex. Bestäm inversen till $f(x) = (x-1)^2 + 1$ för $1 \leq x \leq 3$

Lösning: $D_{f^{-1}} = V_f$ $\quad 1 \leq f(x) \leq 5$

$y = (x-1)^2 + 1 \quad x - 1 = \pm\sqrt{y-1} \quad x = 1 \pm \sqrt{y-1}$

men $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+1} = f^{-1}(y)$

Inversen är $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1} \quad 1 \leq x \leq 5$

② $f(x)$ kallas strängt växande $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
strängt avtagande $\quad (>) \quad (>)$

$f(x)$ kallas växande / avtagande om $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\quad (\geq) \quad (\geq)$

④ $f(x)$ kallas för jämn funktion om $f(-x) = f(x)$

och udda om $f(-x) = -f(x)$

Repetition ② 2015-10-22

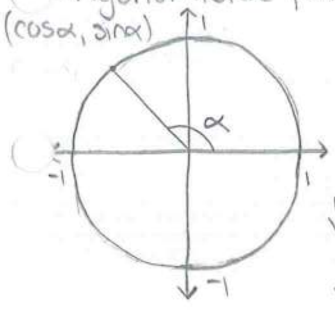
Kap 8 Kunna potenslagar och logaritmlagar

ex. Lös $\ln(2x+3) - \ln(2x+2) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right) = \ln 2$

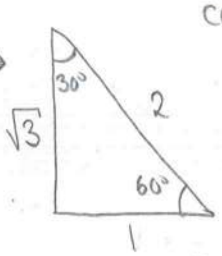
$\Rightarrow \frac{2x+3}{2x+2} = 2 \Leftrightarrow 2x+3 = 4x+4 \quad 2x = -1 \quad x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ Verifiering gör att $x = -\frac{1}{2}$ är en lösning

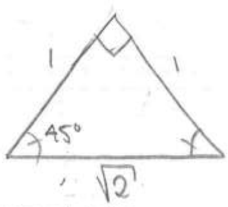
ex. $y = a^x \Leftrightarrow {}^a\log y = {}^a\log(a^x) = x$

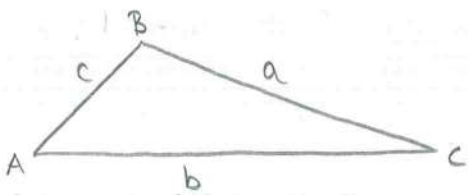
Trigonomiska funktioner



$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$







Sinussatsen $\qquad$ Cosinussatsen $\qquad$ Area $= \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$\boxed{\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x} \quad \boxed{\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \cdot \sin y}$

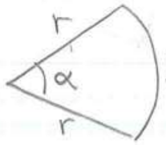
$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cos x$

Om $\sin x_0 = A$ så har $\sin x_0 = A$ lösningar $x = x_0 + 2\pi k$, $x = \pi - x_0 + 2\pi k$

Om $\cos x_0 = A$ så har $\cos x_0 = A$ lösningar $x = \pm x_0 + 2\pi k$

Om $\tan x_0 = A$ så har $\tan x_0 = A$ lösningar $x = x_0 + \pi k$

Cirkelsektor



$\alpha = \frac{l}{r}$ radian

Arean för cirkelsektorn

$\boxed{\frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha}$

Inversfunktioner

$y = \sin x, \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \iff x = \arcsin y$ $\qquad$ $y = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi \iff x = \arccos y$ $\qquad$ $\iff x = \arctan y$

Kap 9

① $\ln x \ll x^c \ll e^x$ då $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10} - 2\ln x + e^x}{\sin x + e^x + 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x\left(\frac{x^{10}}{e^x} - \frac{2\ln x}{e^x} + 1\right)}{3^x\left(\frac{\sin x}{3^x} + \frac{e^x}{3^x} + 1\right)} = 0$$

Kunna standardgränsvärden

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x\to 0^+} x^c \cdot \ln x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

l' Hôpitalsregeln

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Summor och serier

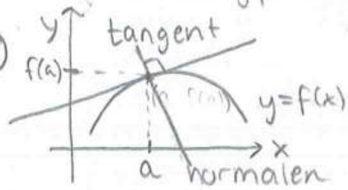
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{för } |x| < 1 \\ \text{divergent} & \end{cases}$$

Ex. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \overset{\text{ty } |\frac{1}{3}|<1}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Kap 10

① $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

② skärningspunk $(a, f(a))$



tangent
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

normalen
$y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

③ Kunna derivera e^x, $\ln|x|$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$
$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

④ Kunna kedjeregeln $f\circ g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

⑤ $y = f(x)$ har inversen $x = f^{-1}(y) \Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ dvs. $\left(f^{-1}(y)\right)'_y = \dfrac{1}{(f(x))'_x}$

⑥ Implicit derivering t.ex. $y = y(x)$ uppfyller $x^2y^3 + y = x$ för alla x

Bestäm $y'(x)$ Lösning: Derivera båda leden på x.

$\underbrace{2xy^3 + x^2\cdot 3y^2\cdot y'}_{x^2y^3} + y' = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1+2xy^3}{x^2 3y + 1}$

⑦ Medelvärdessatsen

$f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och derivatan i $]a,b[$ $\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$
för ngt. $a < c < b$

Ex. Visa att $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ är växande

Bevis: För godtyckligt $x_1 < x_2$ gäller $f(x_2) - f(x_1) \overset{\text{för ngt } x_1 < c < x_2}{=} f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$

$\therefore f(x_1) \leq f(x_2)$ dvs. $f(x)$ är växande.

⑨ $y = ax + b$ är asymptot till $y = f(x) \Leftrightarrow a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ och $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$

⑩ Kunna maximera och rita funktionsgrafer.

Rita grafer: ① Intressanta punkter (stationära, singulära, ändpunkter)

② Teckenschema

③ Asymptoter

④ Skissa kurva

lokala extrempunkter ① Intressanta punkter

② Teckenschema.

extrempunkter $[a,b]$

① Intressanta punkter
② Jämförelse