

Sammanfattning av NumDiff, inför tenta

ch.1

Initial value problems: $\frac{d}{dt}$

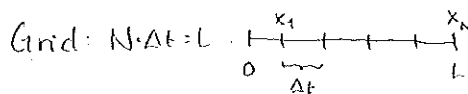
Derivata's definition: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Noggrannhet: $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x) + \Delta x f'(x) + O(\Delta x^2) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x)$ (grad 1 accurate)

(Accuracy) av metoden

$\frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{(f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x) - f(x) + \Delta x f'(x) - \frac{\Delta x^2}{2} f''(x) + O(\Delta x^3))}{2\Delta x} = f'(x) + \frac{O(\Delta x^3)}{2\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x^2)$ (grad 2 accurate)

Hur stort fel i vi bygger i diskretiseringen



Diskretiseringsmetod: finite difference approximation $y' \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t}$

Initial value problem: $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$

Lipshitz konstant $L[f]$: om $L[f] < \infty$ har problemet en entydig lösning.

$L[f] = \sup_{u \neq v} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{\|u - v\|} = \sup_{h \neq 0} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|x+h - x\|} = \max |f'(x)|$ (för derivata)

$L[A] = \sup_{u \neq v} \frac{\|Au - Av\|}{\|u - v\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \|A\|$ om problem på form $y' = Ay$

Explicit Euler method (EE)

$y' = f(t, y) \rightarrow y'(t_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n)$

Order of accuracy: 2 (enligt ovan)
Ej A-stabil

$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{cases}$

(Globala) felet: $e_n = y_n - y(t_n)$ uppfyller $\|e\| \leq C \cdot h$ (felet begränsat)

\Rightarrow Explicit Euler är konvergent!

Lokalt fel: $O(\Delta t^2)$

Globalt fel: $O(\Delta t)$

- Lokalt fel: Fel från enskilt steg
- Globalt fel: Fel från alla steg

Order of consistency \Leftarrow säger något om lokala fel!

Order of convergence \Leftarrow säger något om globalt fel!

Order of consistency: är p om formeln gäller för exakt alla polynom $y = P(t)$ av grad p eller lägre.

Order of convergence: lutningen på log-log kurvan då globala felet plottas som funkt. av N.

Order of consistency och order of convergence har samma värde om metoden är stabil.

Runge-Kutta methods (RK)

Explicit:

koef. framför $t_n + c_i h$

0	0	0	...	0
c_2	a_{21}	0		
c_3	:	:		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	...	0
<hr/>				
	b_1	b_2	...	b_s

koef. framför \dot{Y}_j i ekvationssystemet

$$h \dot{Y}_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$\Rightarrow h \dot{Y}_2 = hf(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h \dot{Y}_1)$$

$$h \dot{Y}_s = hf(t_n + c_s h, y_n + a_{s1} h \dot{Y}_1 + a_{s2} h \dot{Y}_2 + \dots)$$

$$y_{n+1} = y_n + b_1 h \dot{Y}_1 + b_2 h \dot{Y}_2 + \dots + b_s h \dot{Y}_s$$

Om $\sum b_i = 1$ är Explicit Runge-Kutta consistent, dessa är alltid convergent.

inches tabell
stättly lower
triangular
för ERK.

explicit)
Klassiska RK metoden:
bra för var sitt problem

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

Order of accuracy: 4

Kan skapa EF och IRK med 2-stage ERK

Embedded RK: 2 metoder för jobbet av 1

används tolerans

Fungerar även bra för adaptiv grids, där stepsize Δt anpassas efter tol.

Implicit:

c_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}
c_2	a_{21}			
\vdots	\vdots			
c_s	a_{s1}			a_{ss}
<hr/>				
	b_1	b_2	...	b_s

$$\Rightarrow h \dot{Y}_1 = hf(t_n, y_n + a_{11} h \dot{Y}_1 + a_{12} h \dot{Y}_2 + \dots)$$

$$h \dot{Y}_2 = hf(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h \dot{Y}_1 + a_{22} h \dot{Y}_2 + \dots)$$

$$h \dot{Y}_s = hf(t_n + c_s h, y_n + a_{s1} h \dot{Y}_1 + \dots + a_{ss} h \dot{Y}_s)$$

$$y_{n+1} = y_n + b_1 h \dot{Y}_1 + \dots + b_s h \dot{Y}_s$$

inches tabell
can be nonzero
diagonal element
eller tom vara full.

Kan skapa EF och implicit midpoint method med 1-stage IRK.

Stabilitet för RK

Då RK testas för $y' = \lambda y$ får vi $y_{n+1} = R(\lambda h) y_n$

$R(\lambda h) = R(z)$ är metodens stabilitetsfunktion

För ERK är $R(z)$ ett polynom av grad 5.

Metodens stabilitetsområde ges av $D = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$

Om D är enhetscirkeln är metoden A-stabil (ingen ERK är A-stabil)

A-stabilitet:

* Om alla poler till $R(z)$ ligger i HHP, dvs $Re(\lambda_k) > 0$

* Om $|R(i\omega)| \leq 1$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$. (räcker att kolla $\max |R(i\omega)| \leq 1$, dvs Im-axeln)

Font: en analytisk funkt i \mathbb{R} antar sitt maxvärde på ∂D .

ty $R(z) = P(z) \rightarrow \infty$ då $z \rightarrow \infty$

Linear Multistep metoder

Multistep-metoder är av typen: $y_{n+1} = \Phi(t, h, y_0, y_1, \dots, y_n)$, dvs tar ett steg baserat på värdena av flera tidigare steg.

Ex: EE, TR, IE

Multistepmetoder och difference equations: ch 2, slide 30-31

Order of consistency

p om lokala felet är $O(h^{p+1})$ eller

p om metoden håller för alla polynom $y(t) = t^p$ av grad p och lägre.
↳ Testas genom att sätta $y(t) = t^m$, $y'(t) = mt^{m-1}$, $t_{n,j} = j \cdot h$ i metod-uttrycket.

Stabilitet

* Finite step stability: för vilka h metoden är stabil då $f = \lambda y$ testas.
(samma metod som stabilitet för Euler och RK)

* Zero stability: att metoden kan lösa $f = 0$ utan att bli instabil

Om rötterna, r_k , till den karakteristiska ekvationen $\rho(r)$ till metoden uppfyller $r_k \leq 1$, dvs är inuti eller på enhetscirkeln.

dvs origo
finns i stabilitets-
området

Ex: $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = f(t_n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) \rightarrow \rho(r) = r^2 + 4r - 5$

har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 5 \Rightarrow r_1, r_2 \notin$ enhetscirkeln \Rightarrow metoden ej zero stable!

En multistepmetod är konvergent om den är zero-stable + consistent of order $p \geq 1$.

* A-stabilitet: om $\text{Re}(r_k) \leq 0$ (en multistepmetod kan vara användbar även om den inte är A-stabil)

Forward difference: $y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + O(\Delta x)$

Backward difference: $y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t-\Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta x)$

Central difference: $y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t-\Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta x^2)$

$y''(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

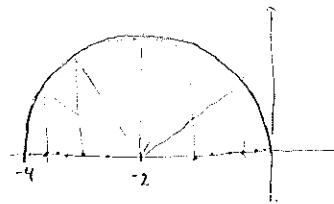
} First order approximation =
Order of accuracy: 1

} Second order approximation =
Order of accuracy: 2

Toeplitz matrisen

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Har egenvärdena: $\lambda_k[T] = -4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) = -2 + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$
(endast negativa!)



För $T_{\Delta x}$ gäller: $\lambda_k[T_{\Delta x}] = -4(N+1)^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \approx -(k\pi)^2 = \lambda\left[\frac{d^2}{dx^2}\right]$
 ↑
 om små vinklar, dvs de första egenvärdena.

$$\|T_{\Delta x}\|_2 = \max_k |\lambda_k| = |\lambda_N| \approx \frac{4}{\Delta x^2}$$

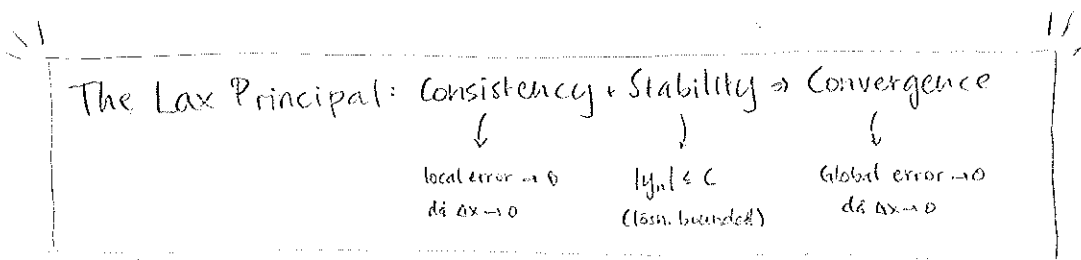
$$\mu_2[T_{\Delta x}] = \min_k \lambda_k = \lambda_1 \approx -(1\pi)^2 = -\pi^2$$

Alla $\lambda_k[T_{\Delta x}] < 0 \Rightarrow T_{\Delta x}$ har en invers, för vilken gäller:

$$\|T_{\Delta x}^{-1}\|_2 \leq -\frac{1}{\mu[T_{\Delta x}]} \approx \frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{RMS-norm: } \|u\|_{\Delta x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N u(x_i)^2 \Delta x} = \sqrt{\frac{L}{N+1} \sum_{i=1}^N u(x_i)^2} = \sqrt{\frac{L}{N+1}} \|u\|_2$$

↓
Den här faktorn beror på vilket grid en har.



$$y'' = f \rightarrow T_{\Delta x} y = f \Rightarrow y = T_{\Delta x}^{-1} f$$

$$T_{\Delta x} u = f \Rightarrow T_{\Delta x} e = d \Rightarrow e = T_{\Delta x}^{-1} d \Rightarrow \|e\|_{\Delta x} \leq \|T_{\Delta x}^{-1}\|_2 \|d\|_2$$

\downarrow $\rightarrow 0$ \downarrow $\frac{1}{\pi^2}$ \downarrow $\rightarrow 0$

ch. 4

Partiell integrering

$$\langle u, Lu \rangle \leq \mu_2[L] \cdot \|u\|_2^2$$

↑
operator

↗
 $T_{\Delta x} \langle u, u'' \rangle = -\langle u', u' \rangle = -\|u'\|_2^2 \leq -\pi^2 \|u\|_2^2$

Lemma: $\|u'\|_2 \geq \pi \cdot \|u\|_2$ - dvs derivatan π gånger större än funktionen.

Om $u(0) = u(1) = 1$ gäller $\langle u, v' \rangle = -\langle u', v \rangle$

selfadjoint

→ Självadjungerande operator: $\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle$, dvs $A = A^*$

Operatorn $\frac{d^2}{dx^2}$ är självadjungerande: $\langle u, v'' \rangle = -\langle u', v' \rangle = \langle u'', v \rangle$ } $T_{\Delta x}$

gäller alla självadjungerande operatorer

⇒ Har reella egenvärden med ortogonala egenfunktioner

Operatorn $\frac{d}{dx}$ är anti-självadjungerande: $\langle u, v' \rangle = -\langle u', v \rangle$ (dvs $L^* = -L$) } $S_{\Delta x}$

gäller alla anti-självadjungerande operatorer

⇒ Har imaginära egenvärden med oscillerande egenfunktioner

Stiffness matrix: $K_{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \text{tridiag}(-1 \ 2 \ -1)$, där $K_{\Delta x} = -\Delta x \cdot T_{\Delta x}$ ($\lambda_e[K_{\Delta x}] = \Delta x \cdot (k\pi)^2$)

Mass matrix: $M_{\Delta x} = \frac{\Delta x}{6} \text{tridiag}(1 \ 4 \ 1)$

Fördelarna med FEM:

- Ger kontinuerlig lösning.
- BC inbyggda i testfunktionen ($c_0 = v(0)$, $c_N = v(1)$)
- Fungerar bra för komplicerade geometrier
- Fungerar bra med ojämna/adaptiva grids. (till skillnad från FDM)
- Ju högre grad på v desto bättre noggrannhet

ch. 5

Partial Differential Equations: $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Exempel:

- * Poisson equation: $-u_{xx} = f$ (elliptic)
- * Diffusion equation: $u_t = u_{xx}$ (Parabolic)
- * Advection equation: $u_t + a u_x = 0$ (advection = convection)
- * Wave equation: $u_{tt} = u_{xx}$ (Hyperbolic)

Klassifikation av PDE:s

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + f(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

$$\delta = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2$$

$$\text{eller } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \delta > 0 & \text{Elliptic} \\ \delta = 0 & \text{Parabolic} \\ \delta < 0 & \text{Hyperbolic} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p+q \text{ jämt} & \text{Hyperbolic} \\ p+q \text{ udda} & \text{Parabolic} \end{cases}$$

* Elliptic problems: ger stora ekvationssystem och behöver ofta iterativa solvers.

* Parabolic problems: behöver en A-stabil implicit time-stepping-metod, t.ex. stiff.

* Hyperbolic problems: utmanande problem med konserverande egenskaper, shock vågor och turbulens. Lösningen kan bli diskontinuerlig, sk. "sonic booms".

Löses enklast med
FDM - om enkel geometri
FEM - om komplex geometri

Method of Lines (MOL)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \underbrace{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}}_{\text{FE: tid}} = \underbrace{\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2}}_{\text{FDM i rum}} \longrightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} T u^n \quad \text{där } \Delta x = \frac{1}{N+1}$$

Courant number: $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Explicit Euler innebär rekursion ent: $u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T u^n = (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} T) u^n$

För stabilitet krävs $|1 + \Delta t \cdot \lambda_k [T_{\Delta x}]| \leq 1$

$$\lambda_k [T_{\Delta x}] = -4(N+1)^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \Rightarrow -\frac{4}{\Delta x^2} \leq \lambda_k \leq -\pi^2$$

\nearrow största egenvärdet
 \nwarrow största egenvärde

För stabilitet krävs alltså att $-\frac{4}{\Delta x^2} \Delta t \leq \Delta t \lambda_k \leq -\pi^2 \Delta t$

ställer krav på $\Delta t!$

CFL-condition: $-\frac{4}{\Delta x^2} \cdot \Delta t \geq -2 \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$

↑
 nödvändigt för EF

Används en A-stabil metod (TR eller IF) kan CFL undvikas. (ty får inget krav på Δt då ty systeme stabilitets region)

Crank-Nicolsson method

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (T_{\Delta x} u^n + T_{\Delta x} u^{n+1}) \Leftrightarrow u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\Delta t}{2} T_{\Delta x} u^n + \frac{\Delta t}{2} T_{\Delta x} u^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} T) u^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} T) u^n \Leftrightarrow u^{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} T)^{-1} (I + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} T) u^n$$

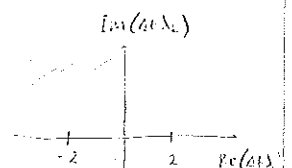
Crank-Nicolsson är som MOL fast med TR istället för EF vilket gör att vi inte längre behöver något villkor för Δt , ent:

För stabilitet krävs: $\frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_k [T_{\Delta x}]}{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_k [T_{\Delta x}]} \leq 1 \Leftrightarrow |2 + \Delta t \lambda_k| \leq |2 - \Delta t \lambda_k|$

$\Delta t \lambda_k$ måste vara negativt

vilket alltid är uppfyllt för alla

Δt och λ_k ty $\Delta t > 0$ och $\lambda_k < 0$.
 \Rightarrow Alltid i stabilitets-området!
 $-4 < \lambda_k < 0$



MOL med EF: Order of accuracy: 2

Consistent

Stabil om CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$

Convergent! (of order: $p=2$)

MOL med TR: Consistent

Unconditionally stable

Convergent of order: $p=2$

Hyperbolic problems

Exempel på hyperbolic problems

- $u_t = u_x$ wave equation
- $u_t + uu_x = 0$ inviscid Burgers equation
- $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ viscous Burgers equation (viskositet)
- $u_t + cu_x = 0$ advection equation

ikke-linjære
konserverings-
lagar.

$u_t = c^2 u_{xx}$ och $u_t + cu_x = 0$ kan lösas med

d'Alemberts lösning $u(t, x) = g(x - ct)$.

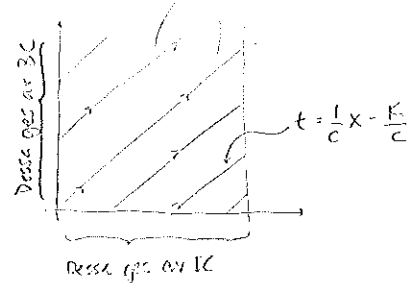
Lösningen u är konstant på karakteristikkurvor:

$x - ct = \text{konst.}$

(characteristics)

(dvs lösningen förändras ej på karakteristikkurva, den bevaras)

karakteristikkurvor



The Advection Equation

En diffusionsterm u_{xx} , dvs lösningen är konstant och ska inte minska i styrke!

$u_t + u_x = 0$

semidiskretisering
explicit time-step

$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$

(upwind Euler)

forward difference / backward difference

eller

$\frac{u_i^{n+2} - u_i^n}{2\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$

(Leapfrog method)

Midpoint rule / Symmetric difference

Advection eq. konserverar lösningens norm förmät i tiden.

Använd aldrig forward difference $u_x \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$ med advection equation

eftersom den beror på föregående punkter ej på framtida punkter (vi kan inte se in i framtiden).

När en semidiskretisering med order of consistency p_1 kombineras med en time-stepping method med order of consistency p_2 bildar de en metod med order of consistency $\min\{p_1, p_2\}$

Courant number för advection equation: $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C$

The Advection equation med FDM

u_i^n (medelvärde) om detta inte görs blir metoden instabil.

Convergent, order of accuracy: 1

The Lax-Friedrichs scheme: $\frac{u_i^{n+1} - \left(\frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + a \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$
 $\Rightarrow u_i^{n+1} = \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) = \frac{1}{2}(1+a\mu)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1-a\mu)u_{i+1}^n \quad (\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x})$

Convergent order of accuracy: 2

The Lax-Wendroff scheme: $u_t = -au_x$ och $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ger $u(t+\Delta t, x) = u + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2!} u_{tt}$ (Taylor-utv.)
 $u_t = -au_x$ och $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ger $u(t+\Delta t, x) = u - a\Delta t u_x + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} u_{xx}$

Bli automatiskt upwind beroende på a och μ .

$\Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t \cdot \underbrace{\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}}_{S_{0x}} + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}}_{T_{0x}} = \frac{a\Delta t}{2}(1+a\mu)u_{i-1}^n + (1-a^2\mu^2)u_i^n - \frac{a\Delta t}{2}(1-a\mu)u_{i+1}^n$

The viscous Burgers Equation

$u_t + uu_x = \varepsilon \cdot u_{xx}$ introducerar nu lite diffusion

Fungerar precis som inviscid Burgers förutom att vi nu även har exponentiell dämpning.

Weak solution: $u(t,x)$ är en weak solution till $u_t + (u^2)_x = 0$ om u uppfyller integralsambandet:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_t u + \varphi_x (u^2)) dx dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,x) u(0,x) dx$$

The Riemann problem

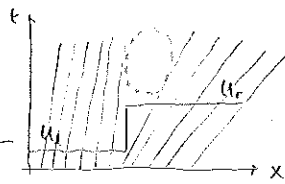
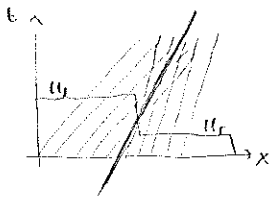
$$u_t + uu_x = 0 \text{ med IC } u(x,0) = \begin{cases} u_l & x > 0 \\ u_r & x < 0 \end{cases}$$

Om $u_l > u_r$:

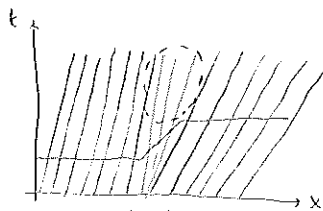
En unik weak solution

Om $u_l < u_r$:

Oändligt många weak solutions



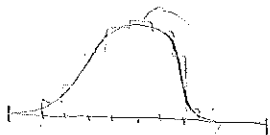
Lösningen ges av Rarefaction waves (förtunningsvågor)



u_l och u_r "dras isär" lite.

Lägger till karaktaristiker mellan u_l och u_r , "fanning" \Rightarrow får nu en entydig lösning

The Godunov method



Lösningen approximeras med en styckvis konstant funktion.

Denna kan lösas med Riemann!

Varje diskontinuitet är ett Riemannproblem som har en exakt lösning.