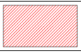
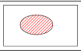
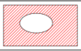
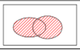
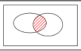
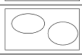
Kap 2. Sannolikhetsteorins grunder

Olika händelser och deras mängbetäckningar

Händelser	Wenn-diag.	Mängdlära
Utfallsrummet Ω		Grundmängden
Händelsen A; A inträffar		Delmängden A
Komplementhlsen. A^* till A; A inträffar ej		Komplementet $\complement A$ till A
Unionhändelsen $A \cup B$; A eller B eller båda inträffar		Unionen $A \cup B$
Snitthändelsen $A \cap B = AB$; både A och B inträffar		Snittet $A \cap B$
A och B *oförenliga* händelser; kan ej inträffa samtidigt		A och B disjunkta

För två händelser gäller att

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Om händelserna är oförenliga är snittet =0, dvs $P(A \cap B) = 0$

Booles olikhet

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Binomialkoefficient fås av

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dragning.

Sats 2.5

Dragning **med** återläggning av k element ur mängden n utan hänsyn till ordning kan ske på k^n sätt

Sats 2.6

Dragning **utan** återläggning av k element ur n (**med** hänsyn till ordning) kan ske på $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ olika sätt

Följdsats

n element kan ordnas på $n!$ olika sätt

Sats 2.7

Dragning **utan** återläggning av k element ur n (**utan** hänsyn till ordning) kan ske på

$\binom{n}{k}$ olika sätt

Definition 2.6

Låt A och B vara två händelser.
Uttrycket

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Kallas den *betingade sannolikheten för B givet att A har inträffat*

Definition 2.7

Om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Så sägs A och B vara oberoende händelser

Kan ses från def 2.6, om A och B är oberoende så är $P(B|A) = P(B)$ eftersom B inte beror på om A har inträffat eller ej.

Alla, ingen eller någon

Om ni har n st oberoende händelser $A_1, \ldots, A_n$kan vi räkna ut sannolikheten att:

- Alla inträffar
  $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$
- Ingen inträffar, dvs alla inträffar inte
  $P(A_1^* \cap \ldots \cap A_n^*) = P(A_1^*) \cdot \ldots \cdot P(A_n^*) = \big(1 - P(A_1)\big) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$
- Någon inträffar, dvs minst en, eller ”inte ingen! (komplement till att ingen inträffar
  $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$

Kap 3. 1-D stokastiska variabler

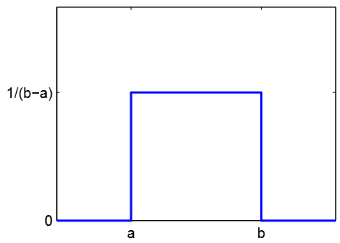
Diskreta fördelningar

- **Binomialfördelning**
  - Förekomst
    Ett slumpmässigt försök med en händelse A där $P(A) = p$ upprepas n oberoende gånger
- **Poissonfördelning**
  - Förekomst
    När saker har inträffat slumpmässigt i tiden eller rummet, μ är händelser i genomsnitt under en tidsperiod.
- **ffg-fördelning**
  - Förekomst
    Försök med händelsen A uppepas oberoende. X= antal försök *tills* A inträffar för första gången.
- **Geometrisk fördelning**
  - Förekomst
    Försöket upprepas. X=antal försök *innan* A inträffar första gången.

Kontinuerliga fördelningar

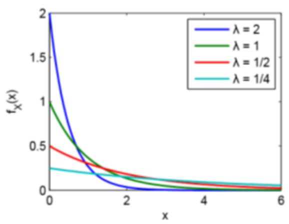
- **Rektangelfördelning**

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \ , \quad a \leq x \leq b$$



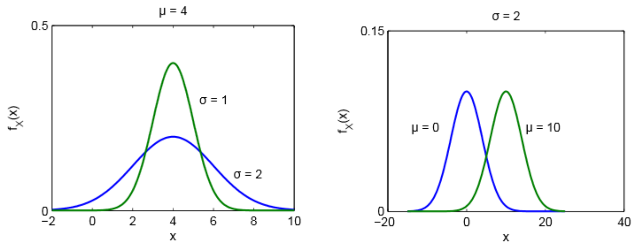
- **Exponentialfördelning**

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ , \quad 0 \leq x$$



- **Normalfördelning**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ , -\infty \leq x \leq \infty$$



Diskreta s.v har en *sannolikhetsfunktion*

$$p_x(k) = P(X = k)$$

Sannolikheten ges av $P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} p_X(k) = F_X(b) - F_X(a)$

Kontinuerliga s.h har en *täthetsfunktion*

$$f_x(x)$$

Sannolikheten ges av $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$

Fördelningsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

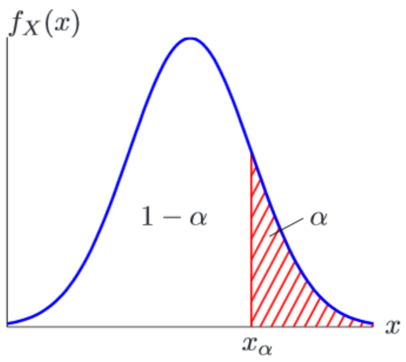
Diskret

$$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$$

Kontinuerligt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

α-Kvantil



Om man bestämmer x så att arean till höger om x blir α får man α-kvantilen. Lösningen till detta ges av och α anges oftast i procent.

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

Invers till fördelningsfunktion

Användbart för tex

- "bestäm k så att $P(X \leq k) = \frac{1}{3}$" som har lösning
  $F_X(k) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow F_X^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = k$
- Beräkna kvantiler
  $$x_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha)$$
- Generera slumptal som har en given fördelning

Inversmetoden

Låt $X \in R(0,1)$, dvs $F_X(x) = x\ , 0 \leq x \leq 1$

Låt Y vara en godtycklig kontinuerlig s.v med fördelningsfunktion $F_Y(y)$ som har inversen $F_Y^{-1}(y)$

Bestäm fördelningsfunktionen för $Z = F_Y^{-1}(X)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(F_Y^{-1}(X) \leq z) \\ &= P\left(F_Y\left(F_Y^{-1}(X)\right) \leq F_Y(z)\right) \\ &= P\big(X \leq F_Y(z)\big) \\ &= F_X\big(F_Y(z)\big) = F_Y(z) \end{aligned}$$

Dvs om vi vill ha slumptal från en fördelning med fördelningsfunktion $F_Y(y)$ kan vi

- Räkna ut $F_Y^{-1}(y)$
- Dra slumptal från en R(0,1) fördelning
- Stoppa in slumptalen i $F_Y^{-1}(y)$ så fås önskad fördelning

Transformation

Givet en s.v X, vilken fördelnign får $Y = g(x)$

Om Y är kontinuerlig

- Sätt upp $F_Y(y) = P(Y \leq y)$
- Stoppa in $Y = g(x)$ och uttryck $F_Y(y)$ som funktion av $F_X(y)$
- Derivera för att få $f_Y(y)$ som funktion av $f_X(y)$

Ex.

Antag $X \in R(0,1)$, då är $F_X(x) =$
$$\begin{cases} 0\ , x < 0 \\ x\ , 0 \leq x \leq 1 \\ 1\ , x > 1 \end{cases}$$

Fördelningsfunktionen för $Y = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(X) = g(x)$ blir då

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P\left(-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(X) \leq y\right) \\ &= P(\ln(X) \leq -\lambda y) \\ &= P\left(X \geq e^{-\lambda y}\right) \\ &= 1 - P\left(X < e^{-\lambda y}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq e^{-\lambda y}\right) \\ &= \begin{cases} 0 \ om\ y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}\ om\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså blir $Y \in Exp(\lambda)$

Stoppar man här in slumptal från en rektangelfördelning så genereras ett exponentialfördelat slumptal

Kap 4. Flerdim stokastiska variabler

Sats 4.1
De s.v X och Y är *oberoende* om och endast om

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Eller

$$p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k)$$
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Största värdet av 2

Sätt Z=max(X,Y)

Eftersom $Z \leq z$ om och endast om både X och Y är $\leq z$ fås

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z \text{ och } Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

Minsta värdet av 2

Sätt Z=min(X,Y)

Eftersom $Z > z$ om och endast om både X och Y är $> z$ fås

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z \text{ och } Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - \big(1 - P(X \leq z)\big) \cdot (1 - P(Y \leq z)) = 1 - \big(1 - F_X(z)\big) \cdot \big(1 - F_Y(z)\big)$$

Summa av s.v

Diskreta

Anta $Z = X + Y$

Då är $p_Z(k) = P(Z = k) = P(X + Y = k)$

Fördelningen bestäms som de olika sätt summan $X + Y = k$ kan inträffa. Man kan ha $X = 0, Y = k$ eller $X = 1, Y = k - 1$ osv, dvs

$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i,j) = \sum_{i=0}^{i=k} p_{X,Y}(i, k - i)$$

Analogt blir

$$F_Z(z) = \sum_{i+j \leq z} p_{X,Y}(i,j)$$

Om X och Y är **oberoende** gäller ju

$$p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k)$$

Och därmed

$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_X(i) \cdot p_Y(j) = \sum_{i=0}^{i=k} p_X(i) \cdot p_Y(k - i)$$

Kontinuerliga

Analogt med diskreta

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy$$

Om **oberoende** blir det en faltning

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(z - x)\, dx$$

Väntevärdet $E(X)$ anger *tyngdpunkten* för fördelningen, dvs det värde man får i medeltal efter många mätningar.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot x\, dx$$

$$E(X) = \sum_i p_X(i) \cdot i$$

Om $Y = g(x)$ så blir $E(Y)$ som ovan men x blir $g(x) och\ g(i)$.

Om $X \text{ och } Y$ är oberoende är

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Variansen $V(X)$ anger hur utspridd X är kring sitt väntevärde

Kovariansen $C(X,Y)$ är ett mått på hur *linjärt* beroende X och Y är

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Obs att enligt ovan gäller följande

$$C(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

Samt att om X och Y är oberoende

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Att $C(X,Y) = 0$ innebär **inte** att X och Y är oberoende, Kovariansen ser bara det linjära beroendet, de kan fortfarande vara kvardatiskt beroende osv. De är däremot *okorrelerade*.

Om de är oberoende är de också okorrelerade

Korrelationskoefficienten definieras som

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Och kan ses som en dimensionslös korrelation.

Om man bildar det aritmetiska medelvärdet av en följd oberoende s.v X_i med vänteväde μ och standardavvikelse σ

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Så gäller det att

$$\begin{cases} E(\overline{X}) = \mu \\ V(\overline{X}) = \sigma^2/n \\ D(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n} \end{cases}$$

Kap 6. Normalfördelningen

En standardiserad normal fördelning är en sådan att $E(X) = \mu = 0, V(X) = \sigma = 1$, dvs $X \in N(0,1)$

Sats 6.1

$X \in N(\mu,\sigma)$ om och endast om $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$

Dessutom gäller att

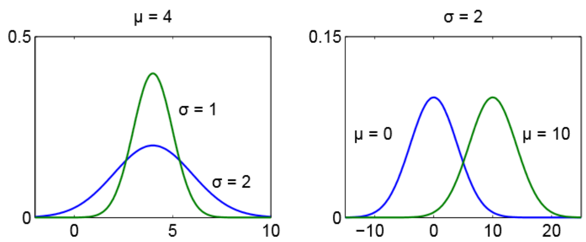
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(x-\mu)$$

Och

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Parametrarna σ *och* μ påverkar täthetsfunktionens utseende

Täthetsfunktioner för några normalfördelningar



En linjärkombination av normalfördelade s.v är normalfördelade.

Sats 6.4

Om $X \in N(\mu_X,\sigma_X), Y \in (\mu_Y,\sigma_Y)$ där X, Y är oberoende, så gäller att

$$X + Y \in N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)$$

$$X - Y \in N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)$$

CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN
Om X_1, X_2 … är en oändlig följd av oberoende likafördelade s.v med väntevärde μ och standardavvikelse $\sigma > 0$, så gäller för $Y_n = X_1 + X_2 \dots + X_n$ att

$$P\left(a < \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

Enligt CGS ovan så innebär det att hela fördelningen går mot en standardiserad normalfördelning när n går mot oändligheten.

CGS gäller även för summor av oberoende icke likafördelade s.v med följande samband:

$Y_n = X_1 + X_2 \dots + X_n$, summa av oberoende icke likafördelade s.v

$$\mu_n = E(Y_n) = E(X_1) + E(X_2) \dots + E(X_n)$$

$$\sigma_n^2 = V(X_1) + V(X_2) \dots + V(X_n)$$

Kap 7. Binomialfördelningen och dess släktingar

Om en händelse A har sannolikheten p att inträffa i ett försök, om n oberoende försök utförs där X är antalet gånger som A inträffar, då blir $X \in Bin(n, p)$

För stora n kan binomialfördelningen approximeras med en normalfördelning, det gäller då (approximativt) att

$$X \in N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

Man får oftast bättre noggrannhet med halvkorrektion här, sätt gränserna $a \text{ och } b$ till $a + \frac{1}{2} \text{ och } b + \frac{1}{2}$ istället när $P(a < X \leq b)$ beräknas

Om p istället är litet kan binomialfördelningen approximeras med en Poissonfördelning, det gäller då approximativt att

$$X \in Po(np)$$

Hypergeometriska fördelningar (dragning utan återläggning med 2 olika föremål) kan också approximeras till binomial, poisson eller normalfördelningar. Finns i f.s s3, där N är antalet element där Np av dessa har egenskapen A och de återstående $N(1-p)$ inte har egenskapen A.