25/10-10

Linjär Algebra

FMA420

Kajsa Dahlin

Komplettera med löspappret!

Kap 1 - Linjära ekvationssystem

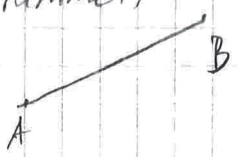
Trappformat system ex.
$$\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ -y-4z&=-1\\ z&=0 \end{aligned}$$

$-y-4\cdot 0=-1 \Rightarrow y=-1$
$x+2(-1)+0=1 \Rightarrow x=3$

26/10 Vektorer (geometriska)

2 punkter, A o B (i planet, rummet)

$\overline{AB}$ - Riktad sträcka



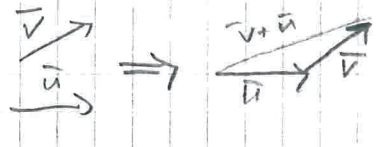
2 riktade sträckor är ekvivalenta om de är lika långa och samma riktning.

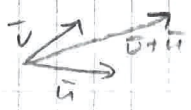
vektor - en ekvivalensklass av riktade sträckor (längd, riktning men ej startpunkt)

Nollvektorn $\bar{0}$ representeras av sträckor med längd 0 (t.ex. $\overline{AA}$)
längden av vektorn $\bar{u}$ betecknas $|\bar{u}|$.

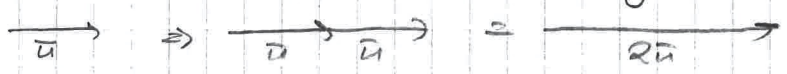
Def. för tal λ o vektor $\bar{u}$ def $\lambda\bar{u}$ som vektorn med längd $|\lambda||\bar{u}|$ och $\bar{u}$'s riktning om $\lambda>0$ / motsatt om $\lambda<0$

Def: Summan $\bar{u}+\bar{v}$. Sätt $\bar{v}$ på spetsen av $\bar{u}$, alt. "kraftparallellogram"





Ex Den självklara likheten $\bar{u}+\bar{u}=2\bar{u}$ inses genom likheten av

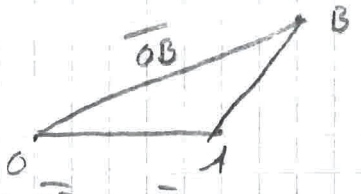


Kolla dem!

→ På samma sätt verkar räknelagarna i Sats 1 självklara, men de måste visas utifrån definitionerna

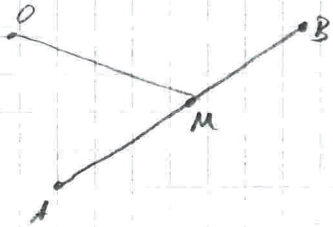
Subtraktion: Vi skriver $\bar{u}-\bar{v}$ för $\bar{u}+(-\bar{v}) = \bar{u}+(-1)\bar{v}$

Ex Givet 3 punkter O, A o B så är $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ då $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ följer från def. av vektor addition.



Alt. $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

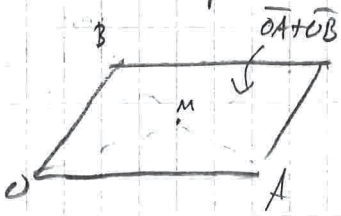
Ex Låt M vara mittpunkten på $\overline{AB}$
Visa att $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \overline{OB}$ för varje punkt O



Lösn: Vi följer strecken i figuren

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{OB}) = \overline{OA} + \frac{1}{2}(-\overline{OA} + \overline{OB}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

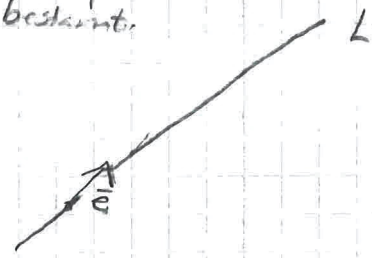
Vi har visat att diagonalerna i ett parallellogram skär varandra mitt itu.



Bas och koordinater

Linjen: Givet en vektor $\bar{e} \neq \bar{0}$ på L så kan varje $\bar{u}$ på L uttryckas som $\bar{u} = x\bar{e}$ där talet x är entydigt bestämt.

x kallas koordinaten för $\bar{u}$ i basen $\bar{e}$



Basbyte

basbytesmatris

$E' = S^T \cdot E \Rightarrow x = S x' \quad (x' = S^{-1} x)$

Ortogonalitet: • $A^T = A^{-1}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

• $(a,c) \cdot (b,d) = 0$ (utgör basvektorer)

ortonormerade: $|(a,c)| = |(b,d)| = x = 0,\ x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Kontrollera först matrisens ortogonalitet, S ortogonal $\Rightarrow x' = S^T x$

Ordlista

antal parametrar = kolonner - pivåelement (rang)
pivotelement - diagonalens element
kolonnrum - mängd linj. komb. av kolonnvektorer (plan om 2 vektorer t ex)
rang - kolonnrummets dimension (max antal linj. oberoende kolonner)
nollrum - lösningar till $Ax = 0$
nolldimension - dimensionen av nollrum (max antal linj. ober. lösn. till $Ax = 0$)

Metod

1. Lös $Ax = 0 \Rightarrow$ nolldim = antal parametrar
2. Rang = kolonner - nolldim (sats)

Avbildning

Kolonnen i avb. matris är matrisens verkan på standardbasvektorerna.

Avbildning - avb. från ett vektorrum till ett annat $F(x)$
värdemängd -

Avbildning F är linjär om: $\begin{cases} F(\bar{x}' + \bar{x}'') = F(\bar{x}') + F(\bar{x}'') \\ F(\lambda \bar{x}) = \lambda F(\bar{x}) \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Flytt från $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ger A!
Kan sen anv. $Ax = y$ för alla

injektiv avbildning: avbildar skilda värden på skilda värden (ett x till varje y i V_f)

bijektiv: injektiv som antar alla värden (y) dvs "V_f = hela M_2"

visualiserat $\longrightarrow$ F bijektiv $\Leftrightarrow$ avb. matris A inverterbar

$A' = S^{-1} A S$ (A i bas E, A' i bas E', $E' = S^T E$)

A avs på $\bar{e}_n$
A' avs på $\bar{e}_n'$

$\bar{y} = A\bar{x} \iff y = F(x)$, $\bar{y}, \bar{x}$ koord. vekt för y och x

A är avb. matris för F med avseende på baserna i N och M $(N \to M)$

Determinanter

$\det A \neq 0$ → linjärt oberoende / → A inverterbar (om $m \times m$)

$\det A^T = \det A$

För $m \times m$: kolonnvektorer/radvektorer utgör en bas (linj. ober.), $\det A \neq 0$ (spänner upp)
(alla ekvivalent)

$AX = 0$ lösn. $X = 0$, $AX = Y$ lösbart för alla Y

A inverterbar. Mao enklast är att kolla om $\det A \neq 0$.

	homogena system ($Ax=0$)	inhomogena system	
$\det A = 0$	finns icke-triviala lösn. (ex. oändl.)	ingen/oändl. lösn	Med detta förutser
$\det A \neq 0$	bara triviala lösn. ($x=0$)	entydig lösn.	man svaret man bör få.

$V(A_1, A_2, A_3) = \det A \cdot V(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$V(F(\bar{v}_1), F(\bar{v}_2), F(\bar{v}_3)) = \det A \cdot V(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ Volym ändras m faktor det A från urbild till bild.

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ $\det I = 1$ $\det(\lambda(A_1, A_2, A_3)) = \lambda^3 \det(A_1, A_2, A_3)$
$\det(\lambda A_1, A_2, A_3) = \lambda \det(A_1, A_2, A_3)$

Beräkning: • $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ för 3x3! 2x2

$\det A = (a \cdot e \cdot i) + (b \cdot f \cdot g) + (c \cdot d \cdot h) - (a \cdot f \cdot h) - (d \cdot b \cdot i) - (c \cdot e \cdot g)$

• Välj rad att utveckla längs, termen som motsvaras fås när talet multipliceras med "minoren" som återstår då raden o kolonnen stryks
Tecken ges av nedan:

$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$ Fortsätt med nästa tal på raden och gör liksom, minns tecken!
Räkna ut summan av alla minordeterminanter!

Egenvärden och egenvektorer

$AX = \lambda X, \quad X \neq 0 \iff \begin{cases} X & \text{egenvektor} \\ \lambda & \text{egenvärde} \end{cases} \qquad F(x) = \lambda x$

Karakteristiskt polynom: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polynom m. variabel λ

$AX = \lambda X$ lösn. $X \neq \bar{0} \Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$

$c \cdot A$: egenvektor X ger egenvärde $c\lambda$

$A + dI$: egenvektor x ger egenvärde $\lambda + I \cdot d$

Metod: • Använd $\det(\lambda I - A) = 0$

• Testa värden för λ i $(\lambda I - A)x = 0$

"egenvektor är nollskild och behåller riktning efter multipl. m. matris"

"hör till varje egenvektor, sk skalningsfaktor, med vilken vektorns storlek ändras."

Diagonalisering

Om det finns S^{-1} och D så att $S^{-1}AS = D$ (nollor förutom i diagonal)

Om alla kolonnvektorer är linjärt oberoende (o alla λ olika)

Diagonalisera: • Bestäm alla λ

• Bestäm alla X

• Bilda $S = (x_1, \dots, x_n)$ och $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Kontrollera $A = SDS^{-1}$ $\left(\text{ex} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right)$

plan $\begin{cases} \underline{\text{Projektion}} & A = I - \frac{n \cdot n^T}{|n|^2} \\ \text{Spegling} & A = I - 2\frac{nn^T}{|n|^2} \end{cases}$

linje $\begin{cases} \text{Proj.} & A = \frac{1}{|\bar{v}|^2} \bar{v}^T \bar{v} \\ \text{Spegl.} & A = \frac{2}{|\bar{v}|^2} \bar{v}^T \bar{v} - I \end{cases}$ linjens riktningsvektor $\bar{v}$

Exempel

★ Bevisa $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Gå från valfritt håll

○ $\underbrace{AB \cdot B^{-1}}_{I} \cdot A^{-1} = I \Rightarrow AIA^{-1} = I \Rightarrow AA^{-1} = I$ $(A \cdot B \cdot (AB)^{-1} = I)$

★ $A^2X = \lambda^2 X$

○ $AX = \lambda x$, $A^2X = A(AX) = A(\overset{\text{tal}}{\lambda} x) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$ samma för A^n

★ Skriv $x + 2y - 3z + 2 = 0$ på parameterform.

○ Inför $y = t$ och $z = s$.

$$\begin{cases} x = -2t + 3s - 2 \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

★ Skriv $\begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 5 + 3t - 2s \\ z = +t \end{cases}$ på affin form.

○ Gaussa bort parametrar.

$$\begin{cases} x = 2 - z + s \\ y = 5 + 3z - 2s \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = x + z - 2 \\ y = 5 + 3z - 2(x + z - 2) = 5 + 3z - 2x - 2z + 4 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 9 = 0$$

★ Beräkna inversen av $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

○ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Låt en rad börja beständig, skapa nollor i en variabel.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Överst klar, teckenbyte förenklar. $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

★ Diagonalisera matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

○ $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$ = endast λ i diag, (annars "teckenbyte.")

$= \lambda^2 - \lambda - 2$, nollställen 2 och -1. Egenvektorer som löser $(A - \lambda I)x = 0$.

för $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 2 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 = -t \\ x_2 = t \end{cases}$

$\Rightarrow t(-1, 1)$

för $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 = 2t \\ x_1 = t \end{cases} \Rightarrow t(1, 2)$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

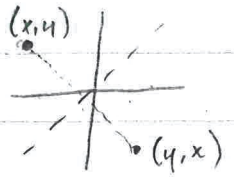
* Beräkna $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ genom utv. längs en rad.

o $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ Tex andra raden. Kolonn eller kolonn... $= -6 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

$= -6(32+0+315-84-0-60) + 2(0+0+210-21-0-0) + (189+0+0-36-56-0) = -1218 + 378 + 97 = -743$

* Beräkna avbildningsmatrisen för spegling i linjen $y=x$.

o



Standardbasvektorerna:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ speglingsmatris $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ Rätt! (Kontroll)

* Bestäm ekvation på parameterform för planet genom punkterna

$P: (1,2,0)$ $Q: (5,-1,2)$ $R: (3,6,-9)$

o Bestäm fixpunkt, ex P $\overline{PQ} = (5-1, -1-2, 2-0) = (4,-3,2)$

$\overline{PR} = (2,4,-9)$

$$\begin{cases} x = 1 + 4s + 2t \\ y = 2 - 3s + 4t \\ z = 2s - 9t \end{cases}$$

* På affin form, annat ekvationssystem.

o $\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 2 - 2s - t \\ z = s + 2t \end{cases}$ Lösn. 1 - Gauss:

$\Leftrightarrow \begin{cases} s - t = x - 1 \\ 2s + t = 2 - y \\ s + 2t = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s - t = x - 1 \\ 3t = 4 - 2x - y \\ 3t = z + 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s - t = \\ 3t = \\ 0 = z + y + x - 3 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 = z + y + x - 3$

Lösn. 2 - Kryssprodukt

kolla s och $t \Rightarrow$ riktninssvektorer. $\bar{s}: (1,-2,1)$, $\bar{t}: (-1,-1,2)$

$\bar{n} = \bar{s} \times \bar{t} = (1,-2,1) \times (-1,-1,2)$ $\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow (-2\cdot 2 - (-1\cdot -1), -1-2, -1-2) = (-3,-3,-3)$

Plocka fram fix punkt, t ex $P_0 = (1,2,0)$

$\overline{P_0P} \cdot n = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2, z-0) \cdot (-3,-3,-3) \Leftrightarrow -x+y+z-3=0$

* Bestäm matrisen för spegling i planet $x-y-z=0$.

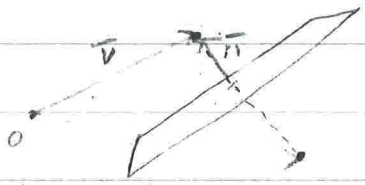
o planets normalvektor: $n=(1,-1,-1)$

Spegling i planet π: $A = I - \underbrace{\frac{2}{|n|^2}}_{\text{tall}} n^T n$

$$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(1,-1,-1) =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\right) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1\\1&\frac{1}{2}&-1\\1&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



* Finn avståndet mellan $P:(3,1,-2)$ och $\pi: 2x+y-5z-7=0$

o Avståndsformeln: $\dfrac{|2\cdot 3 + 1 - 5(-2) - 7|}{\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{30}}$ l.e

* Finn avståndet mellan planen π_1 o π_2.

o $\pi_1: -x+2y-3z=5$ $\quad \pi_2: 5x-10y+15z=21$

$n_1=(-1,2,-3)$ $\quad n_2=(5,-10,15)$ $\quad n_2=-5n_1$ dvs parallella! (ej avstånd $=0$ i stämmas)

Välj en punkt i π_1, t ex $(-5,0,0)$ och finn avstånd till π_2:

$$\frac{|5(-5)-10(0)+15(0)-21|}{\sqrt{5^2+(-10)^2+15^2}} = \frac{46}{\sqrt{350}} \text{ l.e}$$

* Finn arean av det parallellogram som spänns upp av $\bar{u}=(-2,1,0)$, $\bar{v}=(3,1,2)$

o $A = |\bar{u}\times\bar{v}| = |(-2,1,0)\times(3,1,2)| = |(2,4,-5)| = \sqrt{4+16+25} = 3\sqrt{5}$ a.e

* $F(x)$ linj. avb. som avbildar vektorerna $(1,1)$, $(2,3)$ på $(0,2)$, $(-3,5)$. Bestäm A.

o $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-3\\2&5\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix}0&-3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&-3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-3\\1&1\end{pmatrix}$

* Finn matris till avbildning genom proj. på $\pi: x+y+z=0$ följt av rotation vinkeln 30° kring y-axeln. Var hamnar $P:(1,-1,1)$

○ A: Projektionsmatris B: Rotationsmatris C: avbildningsmatris

$C = BA$

$$\underline{A} = I - \frac{1}{|n|^2} nn^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \cos 30° & 0 & \sin 30° \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30° & 0 & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\hat{P} = CP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -4 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{3}\right)$$

Hur många operationer för en $n \times n$-matris? ca $\frac{1}{3}n^3$ st

$$\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ y \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ x \end{array}$$

ex. rot kring x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

* Låt $\{e_1, e_2, e_3\}$ vara en bas, visa att $\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - e_3 \\ f_3 = e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases}$ bildar ny bas.

Bestäm samband för bas och koordinater

Bestäm också koordinater för $u = 6e_1 + 6e_3$ i nya basen.

○ $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Rightarrow$ <u>linjärt oberoende</u> (ny bas, OK!)

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \bar{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \bar{e}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{f} = \bar{e}T \Leftrightarrow \bar{f} = \bar{e}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow f_1 \quad \uparrow f_2 \quad \uparrow f_3$

$\bar{u}$ - godt. vektor m. koord. X i $\bar{e}$

dvs $\bar{u} = \bar{e}X$ och $\bar{u} = \bar{f}Y$

Gamla basen: $\bar{u} = \bar{e}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$X = TY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2 \end{array}$$

$\bar{u} = 4f_1 + 2f_3$

* Lös $Ax=0$

1:a pivot. kolonn OK!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2:a kolonnen inset pivot., är en komb. som beror av 1:a kolonnen. Går till nästa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

3:e raden beroende av de båda ovan $\Rightarrow$ 2 pivotelement $\Rightarrow$ rang $A = 2$

fria kolonner kan få vilka nr som helst, ex $x_2=1$, $x_4=0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2\underset{\substack{\| \\ 1}}{x_2} + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4\underset{\substack{\| \\ 0}}{x_4} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se förhållandet från A.

Testa ist. $x_2=0$ och $x_4=1$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu har vi alla lösn. då allt annat är multiplar:

$$x = c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} Ax=0 \\ Ux=0 \end{matrix}$$

Det finns så många lösningar som det finns fria variabler.

$p = n - r$ (rang) fria variabler (i en $n \times m$-matris)