Kapitel 9

9.1 a) $\frac{1}{z(z-1)^2}$, poler i $z=0$ (enkel) samt $z=1$ (dubbel)

b) $\frac{z}{1-z^4}$, poler i $z=\pm 1$ o $z=\pm i$ (alla enkla)

c) $\frac{z^3}{\sin^2 z}$,

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{z}{\sin z} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$, hävbar singularitet i

$z=0$, poler i $z=\pi k$, $|k|\geq 1$ (dubbla) , $k\in\mathbb{Z}$

d) $\frac{1}{1-\cos z}$, enkla poler i $z=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

e) $\sin\frac{1}{z^2}$

$\lim_{z\to 0} \sin\frac{1}{z^2}$ saknar gränsvärde ty sinus begränsad o periodisk $\Rightarrow$

väsentlig singularitet då $z=0$

f) $\frac{z}{\operatorname{Log} z}$, $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\arg(z)$, måste vara skilt

från den reella axeln, dvs det finns icke isolerade singulariteter

längs hela reella axeln. Dock

$$\lim_{z\to 1} \frac{z}{\operatorname{Log} z} = \lim_{z\to 1} \frac{z}{i\arg(1)} \to \infty \Rightarrow \text{pol (enkel) då } z=1$$

9.2 a) h har en trippel pol i $z=a$

b) $f(z) = \dfrac{\hat{f}(z)}{z-a}$, $g(z) = \hat{g}(z)(z-a)$

$h(z) = f(z)\,g(z) = \hat{f}(z)\hat{g}(z) \cdot \dfrac{z-a}{z-a} = \hat{f}(z)\hat{g}(z)$ som är begränsad, dvs
h har en hävbar singularitet i a

c) om har en pol i a av ordning $k-m$ $(k>m)$ o
en hävbar singularitet i a om $k \leq m$

d) h har fortfarande en väsentlig singularitet i a,

ex:
$$h(z) = \underbrace{z}_{g} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}_{f}$$

e) kan vara vad som: pol, hävbar o väsentlig, se boken