{KAON}

I.1 $R = R_0 \cdot A^{1/3}$ | $R_0 = 1{,}2\,fm$

$^{16}O_8$: $R = 1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot 16^{1/3} = 3{,}0\ fm$

$^{120}Sn_{50}$: $R = (1{,}2 \cdot 120^{1/3})\,fm = 5{,}9\,fm$

$^{208}Pb_{126}$: $R = (1{,}2 \cdot 208^{1/3})\,fm = 7{,}1\ fm$

I.2 [Total: 5,65 x nivel]

$$S_n = \left[m\left({}^{A-1}_{Z}X_{N-1}\right) - m\left({}^{A}_{Z}X_{N}\right) + m_n\right]c^2$$

$$S_p = \left[m\left({}^{A-1}_{Z-1}X_{N}\right) - m\left({}^{A}_{Z}X_{N}\right) + m\left({}^{1}H\right)\right]c^2$$

$M(^{42}Ca) = 41{,}958625\,u$
$M(^{41}Ca) = 40{,}962275\,u$
$M(^{41}K) = 40{,}961832\,u$
$m_n = 1{,}008665\,u$
$m_p = 1{,}007277\,u$
$M(H) = 1{,}007825\,u$

$$S_n = \left[m\left({}^{41}Ca\right) - m\left({}^{42}Ca\right) + m_n\right]c^2 =$$

$$= \left[40{,}962275 - 41{,}958625 + 1{,}008665\right] 931{,}502 \frac{MeV}{c^2} = \underline{11{,}471\ MeV}$$

$$S_p = \left[m\left({}^{41}K\right) - m\left({}^{42}Ca\right) + m\left({}^{1}H\right)\right]c^2 =$$

$$= \left[40{,}961832 - 41{,}958625 + 1{,}007825\right] \cdot 931{,}502 = \underline{10{,}28\ MeV}$$

I.3 $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ · [Fotón sin masa] · $(pc)^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c}$

I.4 $T = E - mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$

$$(pc)^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot c^2 = \frac{m^2v^2}{c^2 - v^2} c^2 = \frac{(mc^2)^2 v^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{(mc^2)^2 v^2}{c^2 - v^2} + (mc^2)^2} - mc^2 \Rightarrow \frac{(mc^2)^2 v^2}{c^2 - v^2} + (mc^2)^2 = T + mc^2$$

$$\frac{v^2}{c^2 - v^2} = \frac{T+1}{mc^2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{c^2}{v^2} - 1} = \frac{T+1}{mc^2} - 1$$

$$1 = \left(\frac{T+1}{mc^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right) \Rightarrow \frac{c^2}{v^2} - 1 = \frac{1}{\frac{T+1}{mc^2} - 1}$$

$$\frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{\frac{T+1}{mc^2} - 1} + 1 = \frac{\frac{T+1}{mc^2} \cancel{-1} \cancel{+1}}{\frac{T+1}{mc^2} - 1} = \frac{\frac{T+1}{mc^2}}{\frac{T+1-mc^2}{mc^2}} = \frac{T+1}{T+1-mc^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{T+1-mc^2}{T+1} c^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T+1-mc^2}{T+1}}\, c = \sqrt{\frac{1+5}{2}} \cdot c$$

$$= 0{,}8 \cdot c = 2{,}6 \cdot 10^8\ m/s$$

I.5 $E = 2m_pc^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(mc^2)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

$3(mc^2)^2 = (pc)^2 = p^2 \cdot c^2$

$3(mc^2)^2 = m^2c^2 \cdot v^2 = \frac{m^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot v^2 \cdot c^2$

$3(mc^2)^2 = \frac{m^2 \cdot c^2}{c^2 - v^2} \cdot v^2 \cdot c^2$

$3(mc^2)^2 = \frac{(mc^2)^2}{c^2 - v^2} v^2$

$\Rightarrow 3 = \frac{v^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow v^2 = 3c^2 - 3v^2 \Rightarrow 2v = \sqrt{3}c$

$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s

$T = 2mc^2 - mc^2 = mc^2 = 938{,}573$ MeV

I.6 $M(Z,N) = ZM(^1H) + Nm_n - B(Z,A)/c^2$ ^{208}Pb

$^{208}B = a_vA - a_sA^{2/3} - a_cZ(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym}\frac{(A-2Z)^2}{A} - \delta =$

$= 15{,}5 \cdot 208 - 16{,}8 \cdot 208^{2/3} - 0{,}72 \cdot 82(82-1) \cdot 208^{-1/3} - 23\frac{(208-2 \cdot 82)^2}{208} +$

$+ \frac{34}{208^{3/4}} = 1613{,}62$ MeV

$^{207}B = 15{,}5 \cdot 207 - 16{,}8 \cdot 207^{2/3} - 0{,}72 \cdot 81(81-1) \cdot 207^{-1/3} - 23\frac{(207-2 \cdot 81)^2}{207} =$

$= 1607{,}53$ MeV

$\Delta B = 1613{,}6 - 1607{,}5 = 6$ MeV

I.7 $^{21}_{10}Ne_{11}$ $^{58}_{26}Fe_{31}$ $^{209}_{83}Bi_{126}$ $^{256}_{100}Fm_{156}$

$\boxed{Ne: \quad A = 21 \quad Z = 10 \quad N = 11}$

$\frac{1}{c}a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = 0{,}72\frac{10 \cdot 9}{21^{1/3}} = 23{,}5$

I.8 $^{24}_{11}Na_B$ $\sim 8{,}48$ MeV

$M(11,13) = 11 \cdot m_p + 13 \cdot m_n$ + massdefekt

$= 11 \cdot 938{,}280 + 13 \cdot 939{,}573 - 8{,}48 =$

$= 24{,}18$ u

I.9 135 a/g ^{147}Sm

$A = \lambda \cdot N(t) \Rightarrow \lambda = \frac{A}{N} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

$1g = 1 \cdot 10^{-3}$ kg $\quad 1u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg

$1kg = 6{,}022 \cdot 10^{27}$ u $\Rightarrow 1g = 6{,}022 \cdot 10^{24}$ u

$1g \Rightarrow N_0 = 6{,}175 \cdot 10^{20} = N$

$A = \lambda \cdot N_0 \Rightarrow 135 = \lambda \cdot 6{,}175 \cdot 10^{20} \Rightarrow \lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-19}$

$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 3{,}155 \cdot 10^{18}$ s $= 1{,}10 \cdot 10^{12}$ a

I.10 1 curie ^{24}Na hälfte sönderfallit

Vid varje sönderfall frigörs 5,53 MeV.

$A_0 = 1$ curie $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ sönderfall/s $\quad T_{1/2} = 15$ h $= 54000$ s

$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$

$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{10}}{1{,}3 \cdot 10^{-5}} = 2{,}8825 \cdot 10^{15}$

$N \cdot E = 2{,}8825 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}53 \cdot 10^{6} = 1{,}6 \cdot 10^{16}$ MeV $= 2553$ J

I.11

$E = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos(\theta))} = \frac{1{,}8}{1 + \frac{1{,}8}{0{,}5}(1 - 0)} = 0{,}40$

{KARN}

1.12 18 MeV elektron bromsas $50 \cdot 10^{-3}$ MeV. (magnesiumfolium)

Uppskatta hur mycket en 24 MeV α-partikel bromsas i en kolfolium med samma tjocklek.

$I = 11{,}5\ eV \cdot Z$.

$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}439976\ MeV \cdot fm$

$$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{4\pi z^2 ZN}{m_e v^2} \ln\left(\frac{2 m_e v^2}{I}\right).$$

Magnesium-folium: $^{24}_{12}Mg_{12}$

$Z = 12$, $N = 12$.

Kolfolium: $^{12}_{6}C_6$

$Z = 6$ $N = 6$.

1.13 ^{127}I Bestrålas under 24h = 86400 s av $1 \cdot 10^{13}$ neutroner/cm²/s.

m = 1 gram

Ur: $^{127}I(n,\gamma)^{128}I$ $\sigma = 7 \cdot 10^{-24}$ cm² | $7 \cdot 10^{11}$ neutroner/s.

$T_{1/2} = 25$ m = 1500 s

Vad är aktiviteten efter 10 min = 600 s.

$$^{128}T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda_{128}} \Rightarrow \lambda_{128} = 4{,}62 \cdot 10^{-4}$$

$$A_{127} = C \cdot K_{127} \cdot \sigma_{127} (1 - e^{-\lambda_{127} \cdot t})$$

$$A_{128} = C \cdot K_{128} \cdot \sigma_{128} (1 - e^{-\lambda_{128} \cdot t})$$

1.19

$l = 1{,}0\,m \qquad v = 10^5\ m/s \qquad I = \frac{1}{32}$

$t = \frac{l}{v} = 10^{-5}\ s$

Under denne tid "forfalder" $\frac{31}{32}$ av radioaktivitet/isotop

$\frac{1}{32} = e^{-\lambda \cdot 1 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 32}{1 \cdot 10^{-5}} = 346574$

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6}\ s = 2\ \mu s$

Version 2012-08-29

Lösningar till problem del I och repetitionsuppgifter 2012

Problem I.1

Beräkna kärnradien hos ${}^{16}_{8}O_8$, ${}^{120}_{50}Sn_{70}$ och ${}^{208}_{82}Pb_{126}$.

Använd r_0=1,2 fm.

L I.1

Enligt relation

$$R = r_0 \cdot A^{1/3}$$

får vi

$$R = 1.2 \cdot 16^{1/3} = \mathbf{3.0\ fm},$$

$$R = 1.2 \cdot 120^{1/3} = \mathbf{5.9\ fm}$$

respektive

$$R = 1.2 \cdot 208^{1/3} = \mathbf{7.1\ fm}$$

Problem m. utskrift.
Konstigt sorterade.

Version 2012-08-29

Problem I.3

Visa att fotonens rörelsemängd är E/c. (Relativistiskt)

L. I.3

Relativistiskt gäller

$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

Fotonens vilomassa $m_0 = 0$,

Alltså blir $p=E/c$

Version 2012-08-29

Problem I.5

Vid vilken hastighet har en accelererad proton en total energi = $2m_pc^2$? Hur stor är då protonens kinetiska energi uttryckt i MeV?
m_p=protonens vilomassa

L I.5

Sambandet mellan rörelsemängd och energi ges i relativitetsteorin av

$$(p \cdot c)^2 - E^2 = -\left(m_p \cdot c^2\right)^2 \tag{1}$$

där

$$p = m \cdot v \tag{2}$$

Den relativistiska massan ges av

$$m = \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

med

$$\beta = v/c \tag{4}$$

Sätt in (2) och (3) i (1)

$$m_p^2 \cdot v^2 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)} = E^2 - \left(m_p \cdot c^2\right)^2$$

Enligt uppgift är $E = 2 \cdot m_p \cdot c^2$

Detta medför att:

$$m_p^2 \cdot c^4 \cdot \beta^2 = \left(1-\beta^2\right) 3 \cdot \left(m_p \cdot c^2\right)^2 \text{ och } \beta^2 = 3 \cdot \left(1-\beta^2\right)$$

$$\mathbf{v = 2.60 \cdot 10^8 \ \ m/s}$$

Problem I.7

Beräkna med hjälp av semiempiriska massformeln den totala bindningsenergin och Coulombenergin för (a) ^{21}Ne, (b) ^{57}Fe, (c) ^{209}Bi och (d) ^{256}Fm.

Lösning I.7

Semiempiriska massformeln ger:

Nuklid	Z	A	N	B-energi	$E_{Coulomb}$
Ne	10	21	11	173.04	23.5
Fe	26	57	31	503.0	122
Bi	83	209	126	1619	826
Fm	100	256	156	1887	1123

Problem I.8

Givet massdefekterna, beräkna atommassorna för (a) ^{24}Na: -8.418 MeV, (b) ^{144}Sm: -81.964 MeV, (c) ^{240}Pu: +50.123 MeV.

Lösning I.8

Massdefekten definieras som

$\Delta = (M - A)\, c^2$ (Krane, sidan 65), $c^2 = 931.5$ MeV/u

(Atom)massan (u) = Δ/931.5 MeV/u + A

(där A är masstalet)

För ^{24}Ne med Δ = -8.418 MeV gäller att

M= 24 - 8.418 /931.5 [MeV/(MeV/u)] = 23.99096 u

På samma sätt:

M[^{144}Sm] = 143.912 u
M[^{240}Pu] = 240.0538 u

Version 2012-08-29

Problem I.10

Beräkna den energi utryckt i joule som totalt frigjorts, när 1 curie ^{24}Na helt och hållet sönderfallit. Vid varje sönderfall frigöres 5,53 MeV.

1 curie = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ sönderfall/s. $t_{1/2}$ = 15 tim.

L I.10

N = antalet ^{24}Na-kärnor från början

aktiviteten = $\lambda \cdot N = 3.7 \cdot 10^{10}$ sönderfall / s

halveringstiden = $t_{1/2} = 15 \cdot 3600$ s

sönderfallskonstanten = $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

antalet ^{24}Na-kärnor = $N = \dfrac{3.7 \cdot 10^{10}}{\lambda} = \dfrac{3.7 \cdot 10^{10}}{\ln(2)} \cdot t_{1/2}$

Frigjord energi:

$$N \cdot 5.53 \text{ MeV} = \frac{3.7 \cdot 10^{10}}{\ln(2)} \cdot 15 \cdot 3600 \cdot 5.53 \cdot 10^{6} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \mathbf{2550 \ J}$$

Problem I.12

En 12 MeV:s proton bromsas 50 keV i ett visst magnesiumfolium. Uppskatta hur mycket en 24 MeV alfa-partikel bromsas i ett kolfolium med samma tjocklek. Medelexcitations-potentialen I kan skrivas $I = I_0 Z$, där $I_0 = 11{,}5$ eV.

Se ekvation 7.3 i Krane.

L I.12

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha = \frac{4\pi \cdot e^4}{(4\pi \cdot \varepsilon_0)^2} \cdot \frac{m_\alpha}{m_e \cdot 2 \cdot T_\alpha} \cdot N_C \cdot z_\alpha^2 \cdot Z_C \cdot \ln\left(\frac{T_\alpha}{Z_C \cdot I_0} \cdot \frac{4m_e}{m_\alpha}\right)$$

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_p = \frac{4\pi \cdot e^4}{(4\pi \cdot \varepsilon_0)^2} \cdot \frac{m_p}{m_e \cdot 2 \cdot T_p} \cdot N_{Mg} \cdot z_p^2 \cdot Z_{Mg} \cdot \ln\left(\frac{T_p}{Z_{Mg} \cdot I_0} \cdot \frac{4m_e}{m_p}\right)$$

$$\frac{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha}{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_p} = \frac{m_\alpha}{m_p} \cdot \frac{T_p}{T_\alpha} \cdot \left(\frac{z_\alpha}{z_p}\right)^2 \cdot \frac{\rho_C}{\rho_{Mg}} \cdot \frac{A_{Mg}}{A_C} \cdot \frac{Z_C}{Z_{Mg}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{T_\alpha}{Z_C \cdot I_0} \cdot \frac{4m_e}{m_\alpha}\right)}{\ln\left(\frac{T_p}{Z_{Mg} \cdot I_0} \cdot \frac{4m_e}{m_p}\right)}$$

(eftersom $N = \frac{\rho}{A} \cdot N_{Av}$)

$$\frac{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha}{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_p} = \frac{4}{1} \cdot \frac{12}{24} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \frac{\rho_C}{\rho_{Mg}} \cdot \frac{24}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{\ln\left(\frac{24}{6 \cdot 11.5 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{4m_e}{4m_p}\right)}{\ln\left(\frac{12}{12 \cdot 11.5 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{4m_e}{m_p}\right)}$$

$$\frac{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha}{-\left(\frac{dT}{dx}\right)_p} = 8 \cdot \frac{\rho_C}{\rho_{Mg}} = 8 \cdot \frac{2.22}{1.74} = 10.2$$

$$-\left(\frac{dT}{dx}\right)_\alpha = -\left(\frac{dT}{dx}\right)_p \cdot 10.2 = \mathbf{510\ keV}$$

Problem I.14

En stråle av radioaktiva kärnor genomlöper ett evakuerat rör som är 1,0 m långt. Hastigheten är 10^5 m/s. Den radioaktiva intensiteten i strålen minskar till 1/32 vid passagen genom röret. Bestäm halveringstiden för kärnan.

L I.14

Om A_0 är aktiviteten vid rörets början erhålles då passertiden är $t = 10 \cdot 10^{-6}$ s

$$\frac{A_0}{32} = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot 10^{-5}}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\ln 32} \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Således är **halveringstiden 2 μs**

$$V_{CB} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{r_\alpha + r_{Th}} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{r_0 \cdot \left(4^{1/3} + 230^{1/3}\right)} \text{ J} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 90 \cdot e^2}{1.2 \cdot 10^{-15} \cdot \left(4^{1/3} + 230^{1/3}\right)} \cdot \frac{1}{e \cdot 10^6} \text{ MeV} \approx \mathbf{28\ MeV}$$

c) Det sökta avståndet ges av

$$\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{r} = Q$$

$$r = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{Q} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 90 \cdot e^2}{4.856} \cdot \frac{1}{e \cdot 10^6} \text{ m} = 53 \cdot 10^{-15} \text{ m} = \mathbf{53\ fm}$$

en neutrino. (Efter K-infångningsprocessen deexciteras dotteratomen genom att emittera röntgen-kvanta och/eller Augerelektroner).

* Experimentellt är massdifferensen 0,23 MeV.

Problem R2

Ett plutoniumprov består av en okänd mängd av ^{239}Pu och ^{240}Pu. Provets specifika aktivitet uppmättes till $1{,}72 \cdot 10^8$ sönderfall per minut och milligram. Halveringstiderna för ^{239}Pu och ^{240}Pu är respektive $2{,}436 \cdot 10^4$ år och $6{,}58 \cdot 10^3$ år. Vilken procentuell viktssammansättning har provet?

Lösning

Antag att x viktprocent är ^{239}Pu. Då är (100-x) procent ^{240}Pu. Antalet sönderfall per gram och sek (dvs aktiviteten) ger ekvationen

$$\frac{x}{100} \cdot \lambda_{239} \cdot N_{239} + \frac{100 - x}{100} \cdot \lambda_{240} \cdot N_{240} = \frac{1.72 \cdot 10^{11}}{60}$$

Då $N = N = \frac{N_A}{A}$ och $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$ erhålles **x = 90**.

Version 2012-08-29

Problem R4

Ett ursprungligen rent prov av ^{227}Th ($t_{1/2}$=18,2 d) sönderfaller till ^{223}Ra genom alfa-emission. ^{223}Ra är också alfa-strålande med halveringstiden 11,7 d. Hur stort kommer förhållandet mellan aktiviteterna, ^{227}Th /^{223}Ra , att vara efter flera månader?

Lösning

För seresönderfall gäller

$$\frac{dN_{Th}}{dt} = -\lambda_{Th} N_{Th}$$

$$\frac{dN_{Ra}}{dt} = \lambda_{Th} N_{Th} - \lambda_{Ra} N_{Ra}$$

med lösningarna för aktiviteterna

$$\lambda_{Th} N_{Th} = \lambda_{Th} N_{Th,0} \cdot e^{-\lambda_{Th} t}$$

$$\lambda_{Ra} N_{Ra} = \frac{\lambda_{Th} \cdot \lambda_{Ra}}{\lambda_{Ra} - \lambda_{Th}} N_{Th,0} \cdot \left(e^{-\lambda_{Th} t} - e^{-\lambda_{Ra} t}\right)$$

Kvoten blir

$$\frac{\lambda_{Th} N_{Th}}{\lambda_{Ra} N_{Ra}} = \frac{\lambda_{Ra} - \lambda_{Th}}{\lambda_{Ra}} \cdot \frac{e^{-\lambda_{Th} t}}{e^{-\lambda_{Th} t} - e^{-\lambda_{Ra} t}} = \frac{\lambda_{Ra} - \lambda_{Th}}{\lambda_{Ra}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(\lambda_{Ra} - \lambda_{Th}) t}}$$

För exponentialuttrycket gäller att för stora t går det mot 1 då $\lambda_{Ra} > \lambda_{Th}$

$$\frac{\lambda_{Th} N_{Th}}{\lambda_{Ra} N_{Ra}} = \frac{\lambda_{Ra} - \lambda_{Th}}{\lambda_{Ra}} = 1 - \frac{\lambda_{Th}}{\lambda_{Ra}} = 1 - \frac{t_{1/2,Ra}}{t_{1/2,Th}}$$

$$\frac{\lambda_{Th} N_{Th}}{\lambda_{Ra} N_{Ra}} == 1 - \frac{11,7}{18,2} = 0,3$$

Version 2012-08-29

Villkoret är uppfyllt för $Z \leq 15$

Problem R6

Visa formeln för hur energin hos den spridda fotonen beror av vinkeln (formel 8.2) i Comptonspridning.Relativistisk behandling krävs.

Lösning

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + T_e$$
$$\overline{p_\gamma} = \overline{p_{\gamma'}} + \overline{p_e} \Rightarrow \overline{p_e} = \overline{p_\gamma} - \overline{p_\gamma}$$
$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p_{\gamma'}^2 - 2p_\gamma p_{\gamma'} \cdot \cos(\theta) \qquad (1)$$

$$E_\gamma = c \cdot p_\gamma$$

$$E_e^2 = (p_e c)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2 = \left(T_e + m_0 c^2\right)^2$$
$$(p_e c)^2 = \left(T_e + m_0 c^2\right)^2 - \left(m_0 c^2\right)^2 = T_e^2 + 2T_e \cdot m_0 c^2$$

Insättning i (1) ger

$$T_e^2 + 2T_e \cdot m_0 c^2 = E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos(\theta)$$
$$\left(E_\gamma - E_{\gamma'}\right)^2 + 2\left(E_\gamma - E_{\gamma'}\right) \cdot m_0 c^2 = E_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos(\theta)$$
$$-2E_\gamma \cdot E_{\gamma'} - 2\left(E_\gamma - E_{\gamma'}\right) \cdot m_0 c^2 = -2E_\gamma E_{\gamma'} \cos(\theta)$$
$$\frac{1}{E_{\gamma'}} = \frac{1}{E_\gamma} + \frac{1 - \cos(\theta)}{m_0 c^2}$$
$$E_{\gamma'} = E_\gamma \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2}\left(1 - \cos(\theta)\right)}$$

Version 2012-08-29

Problem R9

^{196}Au kan sönderfalla med β^-, β^+ och EC. Beräkna Q-värdena för de tre fallen med hjälp av kända atommassor.

Massexcesserna är:

^{196}Au: -31.1400, ^{196}Hg: -31.8267, ^{196}Pt: -32.6474 MeV

$Q_{\beta-} = (M_{Au} - M_{Hg})\, c^2 = \Delta_{Au} - \Delta_{Hg} = -31.1400 - (-)31.8267$ MeV = 0.687 MeV

$Q_{\beta+} = (M_{Au} - M_{Pt} - 2m_e)\, c^2 = \Delta_{Au} - \Delta_{Pt} - 2*0.511$ MeV= 0.4854 MeV

$Q_{EC} = (M_{Au} - M_{Pt})\, c^2 - BE_{(Au\text{-}K)} = \Delta_{Au} - \Delta_{Pt} - 0.0807$ MeV = 1.4267 MeV

Problem R10

Sönderfallskedjan ^{139}Cs → ^{139}Ba → ^{139}La observeras utgående från ett ursprungligen rent prov av 1 mCi ^{139}Cs. Halveringstiderna för ^{139}Cs är 9,5 min, ^{139}Ba 82,9 min medan ^{139}La är stabil. Vilken blir den maximala aktiviteten hos ^{139}Ba och när inträffar den? (1 Ci är $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq)

Lösning
Utgå från utrycket för seriesönderfall, derivera och sätt lika med noll för att erhålla maxvärde.

⇨ $t = 1/(\lambda_A - \lambda_B)\, \ln(\lambda_A/\lambda_B)$, ger att **t = 2012s**
$\lambda_A = 0.001216$
$\lambda_B = 0.0001394$
Insättning av t=2012 i seriesönderfallsformeln ger maximal aktivitet **3.2 MBq**

Problem R11

Pulshöjdsspektrat från ett radioaktivt preparat som emitterar enbart monoenergetisk gammastrålning med ganska hög energi uppvisar tre skarpa, distinkta toppar i kanalnummer 7389, 6490 och 5600.
a) Förklara vilka processer som har gett upphov till de tre topparna!
b) Vilken energi har gammastrålningen?

Lösning
a) Fototopp, single escape och double escape i avtagande energiordning.
b) Linjär anpassning med kännedom om att 0.511 MeV resp 1.022 MeV försvunnit från fototoppen ger att energin för gammakvantat är **4.2202 MeV.**

Version 2012-08-29

Problem I.2

Hur stor energimängd i MeV fordras för att ta bort en neutron eller proton från ^{42}Ca?
Atommassorna är:

$M(^{42}Ca) =$	41,958625 u	$m_n =$	1,008665 u
$M(^{41}Ca) =$	40,962275 u	$m_p =$	1,007277 u
$M(^{41}K) =$	40,961832 u		$M(^{1}H)$=1,007825 u

L I.1

^{42}Ca minus en neutron blir ^{41}Ca. Således blir massändringen:

$$(\Delta m)_n = M\left(^{41}Ca\right) + m_n - M\left(^{42}Ca\right) =$$
$$= 0.012315 \ \ u \cdot 931.4 \ \ MeV / u = 11.470 \ \ MeV$$

^{42}Ca minus en proton blir ^{41}K. Således blir massändringen:

$$(\Delta m)_p = M\left(^{41}K\right) + M\left(^{1}H\right) - M\left(^{42}Ca\right) =$$
$$= 0.011032 \ \ u \cdot 931.4 \ \ MeV / u = 10.275 \ \ MeV$$

Problem I.4

Hur stor hastighet har en β-partikel som har den kinetiska energin 1 MeV?

L I.4

$$(pc)^2 - E^2 = -\left(m_0c^2\right)^2 \quad (1)$$

$$p = m \cdot v \quad (2)$$

$$T = E - m_0c^2 \quad (3)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (5)$$

$$(1) \Rightarrow (pc)^2 = E^2 - \left(m_0c^2\right)^2$$

Sätt in (2), (3) och (4)

$$\left(\frac{m_0 \cdot c \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 = \left(T + m_0c^2\right)^2 - \left(m_0c^2\right)^2$$

$$\frac{\left(m_0c^2\right)^2 \cdot \beta^2}{1-\beta^2} = T^2 + 2T \cdot m_0c^2$$

$$\left(m_0c^2\right)^2 \cdot \beta^2 = T^2 + 2T \cdot m_0c^2 - \beta^2 \cdot \left(T^2 + 2T \cdot m_0c^2\right)$$

$$\beta^2 = \frac{T^2 + 2T \cdot m_0c^2}{\left(T + m_0c^2\right)^2}$$

Sätt in T=1 MeV och m_0c^2=0,511 MeV

$$\beta^2 = 0.8857 \Rightarrow \beta = 0{,}94$$

och

$$v = 0{,}94 \cdot c = 0{,}94 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 = 2{,}8 \cdot 10^8 \, m/s$$

Enligt Tefyma är $m_p \cdot c^2 = 938$ MeV

$$T = E - m_p \cdot c^2 = 2 \cdot m_p \cdot c^2 - m_p \cdot c^2 = m_p \cdot c^2 = \mathbf{938\ MeV}$$

Problem I.6

Beräkna bindningsenergin hos den sista neutronen i ^{208}Pb med hjälp av semiempiriska massformeln.

L I.6

Beteckningar:

S_n=bindningsenergin för sista neutronen

$\Sigma M = 126 m_n + 82 M(^1H)$

B=totala bindningsenergin

S_n för ^{208}Pb definieras av

$$\begin{aligned}
&S_n(208) = M(^{207}Pb) + m_n - M(^{208}Pb) \Rightarrow \\
&S_n(208) + M(^{208}Pb) = M(^{207}Pb) + m_n \Rightarrow \\
&S_n(208) + \Sigma M - B(208) = \Sigma M - B(207) \Rightarrow \\
&S_n(208) = B(208) - B(207)
\end{aligned}$$

Således (med värden på konstanterna från formelsamlingen):

$$\begin{aligned}
S_n(208) = \quad & a_v(208-207) - a_s\left(208^{2/3} - 207^{2/3}\right) - \\
& - a_c\left(\frac{82 \cdot 81}{208^{1/3}} - \frac{82 \cdot 81}{207^{1/3}}\right) - \\
& - a_{sym}\left(\frac{(208 - 2 \cdot 82)^2}{208} - \frac{(207 - 2 \cdot 82)^2}{207}\right) + \frac{a_p}{208^{3/4}} \\
& = 6{,}9 MeV
\end{aligned}$$

$S_n(208)$ = 15.5 -1.8918+1.2976-8.6325+0.62077 =6.89 MeV

Således skulle det åtgå **6,9 MeV**.

Version 2012-08-29

Problem I.9

Naturligt samarium (Sm) har visat sig emittera 135 alfapartiklar per gram och sekund. Isotopen ^{147}Sm (15 viktprocents isotopförekomst) är ansvarig för aktiviteten. Beräkna halveringstiden för ^{147}Sm uttryckt i år.

L I.9

Låt N vara antalet ^{147}Sm-kärnor i 1 g naturligt Sm, dvs

$$N = \frac{15}{100} \cdot \frac{6.023 \cdot 10^{23}}{147}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}} \\ \lambda \cdot N = 135 \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1/2} = 1.0 \cdot 10^{11} \text{ år}$$

$$\left(1.0 \text{ år} \approx 3.155 \cdot 10^{7} \text{ s}\right)$$

Version 2012-08-29

Problem I.11

1,80 MeV gammastrålning från ^{214}Bi undergår Comptonspridning. Hur stor är energien för den spridda strålningen om spridningsvinkeln är 90° respektive 180°?

Se ekvation 8.2.

L I.11

Använd formel för Comptonspridning, ekvation 7.15 i Krane

$$E_{\gamma'} = E_{\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_0 \cdot c^2} \cdot (1 - \cos(\theta))}$$

$E_{\gamma} = 1.80$ MeV

$m_0c^2 = 0.511$ MeV

För $\theta = 90°$ ger detta

$$E_{\gamma'} = 1.80 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1.80}{0.511} \cdot 1} = \mathbf{0.40\ MeV}$$

och för $\theta = 180°$

$$E_{\gamma'} = 1.80 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1.80}{0.511} \cdot 2} = \mathbf{0.22\ MeV}$$

Version 2012-08-29

Problem I.13

1 g jod, som består enbart av isotopen ^{127}I bestrålas i en reaktor under ett dygn i ett flöde av $1{,}0 \cdot 10^{13}$ neutroner/cm^2/sek. Tvärsnittet för reaktion $^{127}I(n,\gamma)^{128}I$ är $7 \cdot 10^{-24}$ cm^2. Vad är aktiviteten i provet 10 minuter efter det att det tagits ut ur reaktorn?
Halveringstiden för ^{128}I är 25 minuter.

L I.13

Utbytet U (= antalet producerade ^{128}I-kärnor per sekund) är konstant under bestrålningen och ges av

$$U = \sigma \cdot \phi \cdot N_{127}$$

där σ är tvärsnittet för reaktionen, ϕ neutronflödet och N_{127} totala antalet ^{127}I-kärnor $\left(= 1.0 \cdot \frac{N_A}{127}\right)$. Antalet ^{128}I-kärnor N efter bestrålning en tid t_b ges av

$$N(t_b) = \frac{U}{\lambda} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t_b}\right)$$

λ är sönderfallskonstanten $\left(= \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{25} \ \text{min}^{-1}\right)$

$t_b = 1$ dygn $= 24 \cdot 60$ min

$\lambda \cdot t_b \approx 40$ varför $e^{-\lambda \cdot t_b}$ är försumbart vid jämförelse med l.

Således

$$N(24 \cdot 60) = \frac{U}{\lambda}$$

Efter bestrålning fås vanlig exponentiell avklingning.

Om t' = 0 vid tiden t_b erhålles

$$N(t') = \frac{U}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t'}$$

och

$$\lambda \cdot N(10) = U \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{25} \cdot 10} = \sigma \cdot \phi \cdot N_{127} \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{25} \cdot 10} = \mathbf{0.25 \cdot 10^{12} s^{-1}}$$

Problem I.15

^{234}U sönderfaller från sitt grundtillstånd genom α-emission. Beräkna

- kinetiska energin hos den energirikaste α-partikeln.
- maximum på den potentialbarriär som α-partikeln måste passera ($R=1{,}2\ A^{1/3}$ fm).
- avståndet från kärnans centrum då α-partikeln passerat barriären

$M(^{234}U)$	234,040 904 u
$M(^{230}Th)$	230,033 087 u
$M(^{4}He)$	4,00260 3 u

L I.15

a)

$$Q = M\left(^{234}U\right) - M\left(^{230}Th\right) - M\left(^{4}He\right) =$$
$$= 0.005214\ \text{u} = 931.4 \cdot 0.005214\ \text{MeV} = 4.856\ \text{MeV}$$

Vi antar att moderkärnan, ^{234}U, är i vila. Då gäller:

$$\begin{cases} p_{Th} = p_\alpha \Rightarrow T_{Th} = \dfrac{p_{Th}^2}{2 \cdot m_{230}} = \dfrac{m_\alpha}{m_{Th}} \cdot T_\alpha = \dfrac{4}{230} \cdot T_\alpha \\ T_{Th} + T_\alpha = Q \\ \dfrac{4}{230} \cdot T_\alpha + T_\alpha = Q \\ T_\alpha = Q \cdot \dfrac{230}{234} = \dfrac{230}{234} \cdot 4.856 = \mathbf{4.773\ MeV} \end{cases}$$

b) Coulombpotentialen ges av $V = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{z \cdot Z \cdot e^2}{r}$

där ze och Ze är a-partikelns respektive Th-kärnans laddning och r är avståndet mellan de båda partiklarnas centra. Coulombbarriärens höjd ges av

Version 2012-08-29

Problem R7

Från kända atommassor (t ex Appendix C, Krane eller IAEA:s databas http://www-nds.iaea.org/relnsd/vchart/index.html), beräkna Q-värdena för följande sönderfall:

a) $^{242}Pu \rightarrow {}^{238}U + \alpha$
b) $^{208}Po \rightarrow {}^{204}Pb + \alpha$
c) $^{208}Po \rightarrow {}^{196}Pt + {}^{12}C$
d) $^{210}Bi \rightarrow {}^{208}Pb + {}^{2}H$

Lösning:
Från Krane; $Q = (242.058737 - 238.050785 - 4.002603)\ c^2 = 0.0053490\ c^2 = 4.982$ MeV

Alternativ: Från databasen ovan får man massdefekterna $\Delta = (M-A)\ c^2$
för t ex Pu, U och He:

$Q = c^2 (M_1 - M_2 - M_3) =$

$= c^2 [\ (\Delta_1/c^2 + A_1) - (\Delta_2/c^2 + A_2) - (\Delta_3/c^2 + A_3)\ ] =$

$= c^2 (\Delta_1/c^2 - \Delta_2/c^2 - \Delta_3/c^2 + A_1 - A_2 - A_3) = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$ eftersom $A_1 - A_2 - A_3 = 0$

a)
$\Delta_1 = 54.7184$ MeV
$\Delta_2 = 47.3089$ MeV
$\Delta_3 = 2.4249$ MeV ger $Q = 4.9846$ MeV

b) p s s $Q = 5.2153$ MeV
c) $Q = 15.1779$ MeV
d) $Q = -6.1790$ MeV Kan alltså inte ske utan energitillförsel!

Problem R8

Använd semiempiriska massformeln för att beräkna α-sönderfallsenergin för ^{242}Cf och jämför med uppmätta värden (se Krane, figur 8.1).

Lösning

Semiempiriska formels ger för ^{242}Cf bindningsenergin 1799.73 MeV, för ^{238}Cm 1780 MeV och ^{4}He 30.7803 MeV.

Frigjord energi $Q = (M_1 - M_2 - M_3)\ c^2 = \ldots = -(B_1 - B_2 - B_3) = 11.3$ MeV

Figur 8.1 ger 7.3 MeV och databasen i **R7** ger 7.5 MeV. Tolkning? Både Cf och Cm är mycket tunga och instabila nuklider i ett område där betastabila linjen upphört. Det är därför en ganska kraftig extrapolation att använda semiempiriska massformeln i detta område där dessutom effekter av permanent deformation mm påverkar kärnornas bindningsenergi.

Version 2012-08-29

Problem R5

^{214}Po utsänder alfapartiklar med energin 7,69 MeV. Dessa får infalla mot ett strålmål. Vilken är den största laddning (Z) strålmålet kan ha ifall dess kärnpotential skall påverka alfapartiklarnas spridning. Alfapartikelns radie är 2,1 fm.

Lösning

Alfapartikeln $(Z_\alpha = 2)$ kommer närmast strålmålkärnan vid central stöt. Om alfapartikeln skall nå fram till kärnans rand $\left(R = r_0 \cdot A^{1/3}\right)$ måste den övervinna Coulombpotentialen

$$\left(\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot Z \cdot e^2}{r}\right)$$

mellan de två partiklarna. Följande måste gälla:

$$T_\alpha \geq \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot Z \cdot e^2}{r_\alpha + R}$$

där T_α är α-partikelns kinetiska energi
och $r_\alpha + R$ är centrumavståndet mellan kärnorna

$$\frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(1.602 \cdot 10^{-19}\right)^2 \ \text{J} \cdot \text{m} = 1.44 \ \text{MeV} \cdot \text{fm}$$

då

$$1 \ \text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \ \text{J}$$

Således måste

$$r_\alpha + R \geq \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot Z}{T_\alpha} = 0.375 \cdot Z \ \text{fm}$$

Med $r_0 = 1.2$ erhålles

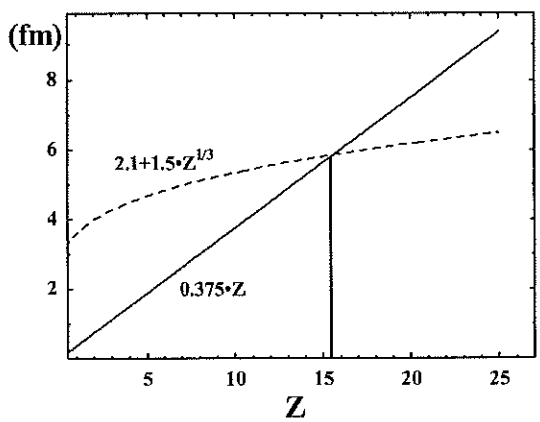
$$2.1 + 1.2 \cdot A^{1/3} \geq 0.375 \cdot Z$$

För $A < 40$ är $Z \approx \frac{A}{2}$

varför olikheten blir

$$2.1 + 1.5 \cdot Z^{1/3} \geq 0.375 \cdot Z$$

Grafisk lösning ger



Version 2012-08-29

Problem R3

Den naturligt förekommande toriumisotopen ^{232}Th ger upphov till en sönderfallskedja enligt

$^{232}Th \rightarrow$	$^{228}Ra \rightarrow$	$^{228}Ac \rightarrow$	$^{228}Th \rightarrow$	$^{224}Ra \rightarrow$	^{220}Rn
k = 1	2	3	4	5	6
$t_k = 1.4 \cdot 10^{10}$ år	6.7 år	6.1 tim	1.9 år	3.6 dag	52 s

o.s.v. Antag att 1 g ^{232}Th får stå till radioaktiv jämvikt inträder (> 25 år). Hur många ^{224}Ra-atomer finns det då i provet?

Lösning

Låt t_k, N_k och λ_k betyda halveringstiden för, antalet av respektive sönderfallskonstanten för nuklid k.

Eftersom $t_1 >> t_2$ erhålls så kallad sekulär jämvikt för t som är stort i förhållande till t_2. Då gäller

$$\lambda_1 \cdot N_1 = \lambda_2 \cdot N_2$$

oberoende av tiden. N_2 minskar således med "halveringstiden" t_1.
Eftersom $t_1 >> t_3$ kommer nukliderna 2 och 3 också i sekulär jämvikt, d v s
$\lambda_2 \cdot N_2 = \lambda_3 \cdot N_3$ o.s.v. Hela kedjan kommer således att vara i sekulär jämvikt och

$$\lambda_1 \cdot N_1 = \lambda_2 \cdot N_2 = \lambda_3 \cdot N_3 = \lambda_4 \cdot N_4 = \lambda_5 \cdot N_5 = \ldots$$

Härur följer att

$$N_5 = \frac{\lambda_1}{\lambda_5} \cdot N_1 = \frac{t_5}{t_1} \cdot \frac{N_A}{232} = \mathbf{1.8 \cdot 10^9}$$

Version 2012-08-29

Lösningar till Repetitionsuppgifter

Problem R1

Avgör med hjälp av den semiempiriska massformeln huruvida ^{55}Fe är stabil mot β-sönderfall. Om nukliden är instabil så ange vilka partiklar som emitteras vid sönderfall enligt massformeln. Parametrar till massformeln fås ur 3.29 eller formelsamling.

Lösning

Enligt Tefyma sönderfaller ^{55}Fe genom K-infångning. Vid detta sönderfall minskar antalet protoner i kärnan med 1 och antalet neutroner ökar med 1 - vi får ^{55}Mn. Massformeln ger endast en parabel för isobarerna med A = 55 eftersom 55 är udda. Vi behöver endast använda massformeln för att under-söka om ^{55}Fe är tyngre än någon av sina grannar (^{55}Mn och ^{55}Co), och i så fall vilken (kan endast vara en!). Om massformeln ger riktigt resultat skall (enligt Tefyma) ^{55}Fe vara tyngre än ^{55}Mn vilket vi testar.Vi får

$$M\left(^{55}Fe\right)\cdot c^2 - M\left(^{55}Mn\right)\cdot c^2 = \ldots =$$

$$= M\left(^{1}H\right)\cdot c^2 - m_n \cdot c^2 + a_c \cdot \frac{51}{55^{1/3}} - a_a \cdot \frac{16}{55}$$

$$M\left(^{1}H\right) \approx m_p + m_e$$

$$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} = 5.5 \cdot 10^{-4}\ \text{u} \quad \text{enl Tefyma}$$

$$m_p = \qquad = 1,00728\ \text{u} \quad \text{enl Tefyma}$$

$$m_n = \qquad = 1,00867\ \text{u} \quad \text{enl Tefyma}$$

Genom sortförvandling från u till MeV erhålles

$$M\left(^{1}H\right)\cdot c^2 - m_n \cdot c^2 = -0.0084 \cdot 931.4\ \text{MeV} = -0.78\ \text{MeV}$$

Enl. sid. 2-14 är $a_c = 0.6$ och $a_a = 20$ varför

$$M\left(^{55}Fe\right)\cdot c^2 - M\left(^{55}Mn\right)\cdot c^2 = -0.78 + 8.05 - 5.83 = 1.45\ \text{MeV}$$

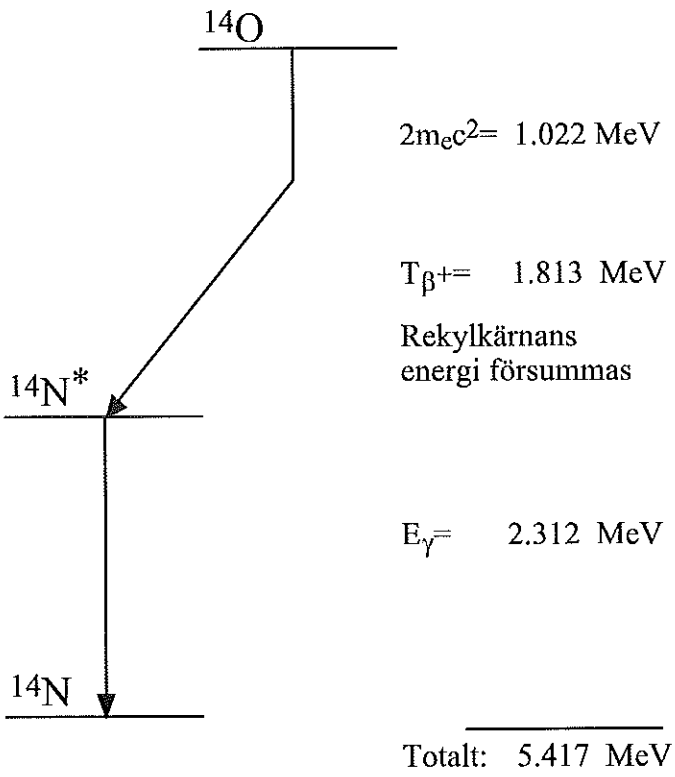
Enligt massformeln är ^{55}Fe tyngre än ^{55}Mn med mer än $2m_ec^2 = 1.02$ MeV varför ^{55}Fe borde vara instabil mot både K-infångning och β^+-sönderfall. (Troligtvis förutsäger massformeln en för stor massdifferens eftersom Tefyma ej säger något om β^+-sönderfall*). Vid β^+-sönderfall emitteras en neutrino förutom positronen och vid K-ingångning emitteras

Version 2012-08-29

Lösningar del II

Problem II.3

Kärnan ^{14}O sönderfaller under utsändning av en positiv elektron till en exciterad nivå i ^{14}N, vilken i sin tur sönderfaller till grundtillståndet under emission av ett γ–kvantum med energin 2,312 MeV. β-



spektrums maximumenergi är 1,813 MeV. Beräkna massan för ^{14}O. Massan för ^{14}N är 14,003074 u.

L II.3

β^+ sönderfall

$$5.147 \text{ MeV} = \frac{5.1478}{931.4} \text{ u} = 0.005526 \text{ u}$$

Massan för ^{14}O blir 14.003074 + 0.005526 = **14.008600u**.

Version 2012-08-29

Problem II. 4

Beräkna Q-värdet för reaktionen

$$d + {}^{14}N \rightarrow {}^{15}N + p$$

då massorna i u ges av

Kärna	massa (u)
$M({}^{2}H)$	2,014102
$M({}^{14}N)$	14,003074
$M({}^{15}N)$	15,000108
$M({}^{1}H)$	1,007825

L II. 4

Enligt definition är

$$Q = (m_i - m_f)\cdot c^2 = T_f - T_i$$

$$Q = \sum m_i \cdot c^2 - \sum m_f \cdot c^2$$

där m_i och m_f är kärnmassor. Eftersom det som regel är atommassan som anges gör vi följande approximation

$$Q = (m_d + m_{14} - m_{15} - m_p)\cdot c^2 =$$

$$= (m_d + m_e + m_{14} + 7m_e - (m_{15} + 7m_e) - (m_p + m_e))\cdot c^2 =$$

$$= (M({}^{2}H) + M({}^{14}N) - M({}^{15}N) - M({}^{1}H))\cdot c^2 +$$

$$+ B_e({}^{2}H) + B_e({}^{14}N) - B_e({}^{15}N) - B_e({}^{1}H) \approx$$

$$\approx (M({}^{2}H) + M({}^{14}N) - M({}^{15}N) - M({}^{1}H))\cdot c^2$$

OBS! Vi har adderat och subtraherat lika många elektroner. Approximationen består i att vi ej tagit hänsyn till skillnaden i elektronernas bindningsenergi.

Vi får

$$Q = 0.009243 \text{ u} \approx \mathbf{8.61\ MeV}$$

Problem II.5

Beräkna positronens maximala energi i följande reaktion
$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu$. Reaktionen $^{13}C + p \rightarrow {}^{13}N + n$ är endoterm med Q-värdet –3 MeV.
$m_n = 1{,}0086654$ u, $m\left({}^{1}H\right) = 1{,}0078252$

L II.5

$$Q_R = (Q - \text{värdet för kärnreaktionen}) =$$
$$= \left(M\left({}^{13}C\right) + M\left({}^{1}H\right) - M\left({}^{13}N\right) - m_n\right) c^2$$
$$Q_{\beta^+} = \left(M\left({}^{13}N\right) - M\left({}^{13}C\right) - 2m_e\right) c^2 \cong T_{\beta^+,max}$$
$$T_{\beta^+,max} = Q_{\beta^+} = -Q_R - (m_n - M\left({}^{1}H\right) \cdot c^2 - 2m_e \cdot c^2$$
$$= 3{,}00 - 0.00840 \cdot 931{,}4 - 1{,}02 = 1{,}20 \text{ MeV}$$

Problem II. 6

Med termiska neutroner kan följande reaktion ske

$$^{10}_{5}B + n \rightarrow \left[^{11}_{5}B^{*}\right] \rightarrow ^{7}_{3}Li^{*} + \alpha$$

Blandkärnan spaltas således upp i en α–partikel och en Li-kärna. Li-kärnan blir exciterad med excitationsenergin 0,48 MeV. Hur stor kinetisk energi får α-partikeln?

kärna	Massa (u)
m_n	1, 008665
$M\left(^{4}_{2}He\right)$	4,002603
$M\left(^{7}_{3}Li\right)$	7,016004
$M\left(^{10}_{5}B\right)$	10,012939

L II. 6

$Q = (M_B + m_n - M_{Li} - M_{He})\, c^2 = 2.791$ MeV

$Q^* = T_{Li} + T_{He} - T_B - T_n = 2.31$ MeV $= Q - 0.48$ MeV

Här gäller $T_B = 0$ och $T_n \approx 0$.

Rörelsemängdslagen ger

$$p_{Li} = p_{He} \quad \text{d.v.s.} \quad m_{Li}T_{Li} = m_{He}T_{He}$$

således

$$Q^* = \left(1 + \frac{m_{He}}{m_{Li}}\right) \cdot T_{He}$$

och

$$T_{He} = \frac{7}{11} \cdot Q = \mathbf{1.47\ MeV}$$

Problem II. 7

En av de reaktioner som är möjliga då bor beskjuts med 1,600 MeV's deuteroner är $^{11}B(d,\alpha)^{9}Be$. De alfapartiklar som går ut i 90° relativt den inkommande deutronstrålen studeras. Därvid erhålles bland annat en grupp alfapartiklar med energin 5,216 MeV. I vilket energitillstånd lämnas ^{9}Be kärnan av dessa alfapartiklar?

Kärna	massa (u)
$M(^{2}H)$	2,014102
$M(^{4}He)$	4,002603
$M(^{9}Be)$	9,012186
$M(^{11}B)$	11,009305

L II. 7

Q-värdet för reaktionen är

$$Q = (M(^{11}B) + M(^{2}H) - M(^{9}Be) - M(^{4}He))*c^{2} = 8.02 \text{ MeV}$$

Konserveringslagarna ger

$$T_d + Q = T_\alpha + T_{Be} + E^* \quad (1)$$

$$\text{i } x-\text{led}: \; p_d = p_{Be} \cdot \cos(\phi)$$

$$\text{i } y-\text{led}: \; p_\alpha = p_{Be} \cdot \sin(\phi)$$

kvadrera och summera

$$p_d^2 + p_\alpha^2 = p_{Be}^2$$

$$T_{Be} = \frac{m_d}{m_{Be}} \cdot T_d + \frac{m_\alpha}{m_{Be}} \cdot T_\alpha \quad (2)$$

Kombinera (1) och (2) och lös ut E^*

$$E^* = T_d + Q - T_\alpha - \frac{m_d}{m_{Be}} \cdot T_d - \frac{m_\alpha}{m_{Be}} \cdot T_\alpha$$

$$E^* = 1{,}600 \cdot \left(1 - \frac{2}{9}\right) - 5{,}216\left(1 + \frac{4}{9}\right) + 8{,}02$$

$$E^* = 1{,}24 - 7{,}53 + 8{,}02 = 1{,}73 \text{ MeV}$$

Problem II. 8

Deuteroner med energin 0,92 MeV får träffa ett tunt berylliumfolie placerat i vakuum, varvid följande direkta reaktion inträffar

$$^{9}\mathrm{Be}(\mathrm{d},\mathrm{n})^{10}\mathrm{B}.$$

Kärna	massa (u)
m_n	1,008665
$M(^2H)$	2,014102
$M(^9Be)$	9,012186
$M(^{10}B)$	10,012939

a) Beräkna reaktionens Q-värde.

b) Till vilken energi exciteras ^{10}B kärnan om den utgående neutronens energi är mycket låg?

L II. 8

a)

Q-värdet för reaktionen är

$Q = (M(^9Be) + M(^2H) - M(^{10}B) - m_n)*c^2 = 4{,}36$ MeV

b)

Konserveringslagarna ger

$T_d + Q = T_n + T_B + E^*,\ T_n = 0$ (1)

i x-led: $p_d = p_B$

i y-led: $p_n = 0$

kvadrera

$p_d^2 = p_B^2$

$T_B = \frac{m_d}{m_B} \cdot T_d$ (2)

Kombinera (1) och (2) och lös ut E^*

$$E^* = T_d + Q - \frac{m_d}{m_B} \cdot T_d$$

$$E^* = 0{,}92 \cdot \left(1 - \frac{2}{10}\right) + 4{,}36 = 5{,}10 \text{ MeV}$$

Problem II.9

Kärnan ${}^{11}_{4}\mathrm{Be}$ sönderfaller genom β^--emission till ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$. Beräkna rekylkärnans maximala kinetiska energi då $Q_{\beta-} = 11{,}5$ MeV.

L II.9

Rekylkärnans, elektronens och neutrinons rörelsemängd resp. kinetiska energi betecknas p_Y, p_e, p_ν, och T_Y, T_e, E_ν. För godtyckligt värde på p_e är p_Y störst då p_e och p_ν är parallella. Vi har

$$p_Y = p_e + p_\nu = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 \cdot c^4}}{c} + \frac{E_\nu}{c} = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 \cdot c^4}}{c} + \frac{E_0 - E_e}{c}$$

där E_e, E_0 och m_e är elektronens totala energi, maximala totala energi respektive elektronens vilomassa, d.v.s. $E_0 = E_e + E_\nu$.

$$\frac{dp_Y}{dE_e} = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 \cdot c^4}} - 1 \right) > 0$$

Således har p_Y och därmed T_Y maximum då $E_e = E_0$.

Vi får

$$p_{Y_{max}} = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 \cdot c^4}}{c}$$

Men

$$Q_{\beta^-} = Q = T_{\beta^-,\nu=0} + T_{Y,\nu=0} \approx T_{\beta^-,\nu=0} = E_0 - m_e \cdot c^2 \qquad (1)$$

Således

$$\frac{p_{Y_{max}}^2}{2 \cdot m_Y} = \frac{1}{2 \cdot m_Y \cdot c^2} \cdot \left(\left(Q + m_e \cdot c^2 \right)^2 - m_e^2 \cdot c^4 \right) = \frac{Q \cdot \left(Q + 2 \cdot m_e \cdot c^2 \right)}{2 \cdot m_Y \cdot c^2}$$

$$Q = 11.5 \ \text{MeV}$$

$$m_Y \cdot c^2 = 11 \cdot 931 \ \text{MeV} \approx 10^4 \ \text{MeV}$$

$$m_e \cdot c^2 = 0.511 \ \text{MeV}$$

$$T_{Y,\nu=0} = \frac{11.5 \cdot (11.5 + 2 \cdot 0.5)}{2 \cdot 10^4} = 7 \cdot 10^{-3} \ \text{MeV} \Rightarrow T_{\beta^-,\nu=0} \approx Q$$

d.v.s. approximationen i (1) är rimlig.

Problem II. 10

Beräkna

1. antalet kollisioner som i medeltal behövs för att reducera neutronenergin från 2MeV till 0,025 eV,
2. bromsförmågan och
3. modereringsförhållandet i ämnena fluor (100% ^{19}F), magnesium (~80% ^{24}Mg) och vismut (100% ^{209}Bi) vid 0° C och 1,013 bar.

Ämne	σ_a	σ_s
^{19}F	9 mb	5b
^{24}Mg	59 mb	6b
^{209}Bi	30 mb	9 b

Använd följande tvärsnittsvärde och antag att magnesium till 100% består av ^{24}Mg.

L II. 10

$$\zeta = \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \ldots = \ln\left(\frac{T_{n-1}}{T_n}\right)$$

alltså

$$n \cdot \zeta = \ln\left(\frac{T_0}{T_n}\right)$$

Antalet kollisioner ges av

$$n_t = \frac{1}{\zeta} \cdot \ln\left(\frac{T_0}{T_n}\right) = \frac{18.2}{\zeta} \qquad (1)$$

och ζ av

$$\zeta = 1 + \frac{(A-1)^2}{2 \cdot A} \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) \qquad (2)$$

Bromsförmågan S och modereringsförhållandet M ges av

$$S = \zeta \cdot \Sigma = \zeta \cdot \frac{\rho \cdot N_{Av}}{A} \cdot \sigma_s \qquad (3)$$

respektive

$$M = \zeta \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_a} \tag{4}$$

Med relationerna (1) - (4) och N_A, A och ρ ur Tefyma erhålles

	A Tefyma	**ζ**	**n_t**	**ρ (kg/dm^3)** Tefyma	**S (cm^{-1})**	**M**
F	19.0	0.102	180	0.00170	$2.7 \cdot 10^{-5}$	57
Mg	24.3	0.080	230	1.74	0.021	8.1
Bi	209.0	0.0095	1900	9.80	0.0024	2.8

Problem II. 11

Beräkna atomförhållandet $^{236}U/^{235}U$ för ett prov som från början består av rent ^{235}U och som sedan bestrålas under 10 dagar i ett neutronflöde av $1{,}00 \cdot 10^{14}$ termiska neutroner cm^{-2} sek^{-1}. Det förutsättes att inget ^{236}U försvinner genom neutronabsorption. Tvärsnittet för fission av ^{235}U är $576 \cdot 10^{-24}$ cm^2 och för neutroninfångning $104 \cdot 10^{-24}$ cm^2. De båda uranisotopernas halveringstider är långa.

L II. 11

Φ = neutronflödet = $1.00 \cdot 10^{14}$ cm^{-2} s^{-1}

t_b = bestrålningstiden = $10 \cdot 24 \cdot 3600$ s

σ_{inf} = infångninstvärsnittet = $104 \cdot 10^{-24}$ cm^2 (per atom)

σ_f = fissionstvärsnittet = $576 \cdot 10^{-24}$ cm^2 (per atom)

σ_{tot} = totala tvärsnittet = $680 \cdot 10^{-24}$ cm^2 (per atom)

$N_5(t)$ = antal ^{235}U-atomer vid tiden t

$N_6(t)$ = antal ^{236}U-atomer vid tiden t

Ändring i N_5 (sönderfall försummas).

$$-dN_5 = \left(\sigma_f \cdot N_5 \cdot \Phi + \sigma_{inf} \cdot N_5 \cdot \phi\right) \cdot dt \Rightarrow N_5(t) = N_5(0) \cdot e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t}$$

Ändringen i N_6 (sönderfall försummas)

$$dN_6 = \sigma_{inf} \cdot N_5 \cdot \phi \cdot dt = \sigma_{inf} \cdot N_5(0) \cdot e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t} \cdot \phi \cdot dt$$

$$N_6(t) = konst - \frac{\sigma_{inf}}{\sigma_{tot} \cdot \Phi} N_5(0) \cdot e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t} \cdot \Phi$$

$N_6(0) = 0$ enl. uppgift $\Rightarrow$

$$N_6(t) = \frac{\sigma_{inf}}{\sigma_{tot}} N_5(0) \cdot \left(1 - e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t}\right)$$

$$\frac{N_6(t)}{N_5(t)} = \frac{\sigma_{inf}}{\sigma_{tot}} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t}\right)}{e^{-\sigma_{tot} \cdot \Phi \cdot t}} = \frac{104}{680} \cdot \frac{\left(1 - e^{-0.0588}\right)}{e^{-0.0588}} = \mathbf{0.0092}$$

Problem II. 12

Vid fission av ^{235}U med termiska neutroner är det mest sannolika massförhållandet på fissionsfragmenten 1,45 och fragmentens sammanlagda kinetiska energi 168 MeV. Beräkna hastigheten för de två primära fragmenten före neutronemission.

L II. 12

Energilagen ger

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = T_f \qquad (1)$$

där T_f = fragmentens sammanlagda kinetiska energi = 168 MeV.

Impulslagen ger

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{m_1}{2} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \cdot v_1^2 = T_f \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot T_f}{m_1 \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}}$$

$$v_1 = c \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \cdot \frac{T_f}{m_1 \cdot c^2}} = c \cdot \sqrt{\frac{2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{T_f}{\frac{m_1}{m_2} \cdot c^2}}$$

$$m_1 + m_2 = 236u \quad \text{och} \quad \frac{m_1}{m_2} = 1.45$$

$$v_1 = c \cdot \sqrt{\frac{2}{236 \cdot 931.4} \cdot \frac{168}{1.45}} = \mathbf{0.97 \cdot 10^7 \ m/s}$$

$$2 \Rightarrow v_2 = \mathbf{1.41 \cdot 10^7 \ m/s}$$

Problem II. 13

En cyklotron används för att accelerera protoner.
a) Skissa hur en cyklotron ser ut, förklara hur den fungerar och visa att den kinetiska energin ges av:

$$T = (z \cdot e \cdot B)^2 \cdot R^2 / (2m)$$

b) Antag att radien på cyklotronen är 30 cm. Vilket är det minsta värde på B-fältet som gör det möjligt att producera neutroner med hjälp av reaktionen:

$$p + {}^{13}C \rightarrow {}^{13}N + n; \quad Q = -3.003 \text{ MeV}$$

L II. 13

a) *) Krane 15.2.

b) Använd uttrycket för tröskelenergi

$$T_{tr} = -Q \frac{\Sigma m_i + \Sigma m_f}{2 \cdot m_{målkärna}} = -(-3.003) \cdot \frac{1+13+13+1}{26} = 3.234\ MeV$$

Insättning i ekvationen för cyklotronens energi ger

$$B = \frac{\sqrt{2 \cdot T \cdot m}}{z \cdot e \cdot R}$$

T=3.234 MeV
m=931.4 MeV/c^2
z=1
e=1.6 · 10^{-19} As

$$B = \frac{\sqrt{2 \cdot 3.234 \cdot 931.4}}{1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.3} \frac{[MeV]}{[c]} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3.234 \cdot 931.4}}{0.3 \cdot c} \cdot 10^6 \left[\frac{V \cdot s}{m \cdot m}\right] = 0.86T$$

Svar: 0.86 T(esla)