Studiematerial I - KF

I1 Beräkna kärnradien

$$R = \sqrt[3]{A} \cdot r_0 \quad , \quad r_0 = 1.2\,fm$$

a) $^{16}O_8 \Rightarrow R = \sqrt[3]{16} \cdot 1.2\,fm = \boxed{3\,fm}$

b) $^{120}Sn_{70} \Rightarrow R = \sqrt[3]{120} \cdot 1.2\,fm = \boxed{5.9\,fm}$

c) $^{208}Pb_{120} \Rightarrow R = \sqrt[3]{208}\ 1.2\,fm = \boxed{7.1\,fm}$

I2 Hur stor kärnenergi fodras för att ta bort en neutron eller proton från ^{42}Ca?

Om vi tar bort en neutron, använd eq 3.26.

$$S_n = B({}^{A}_{Z}X_N) - B({}^{A-1}_{Z}X_{N-1}) = \left[m({}^{A-1}_{Z}X_{N-1}) - m({}^{A}_{Z}X_N) + m_n\right]c^2$$

Vi har alltså

$$S_n = \left[M^{41}Ca - M^{42}Ca + m_n\right]c^2 = \boxed{11.470\ meV}$$

För en proton, eq 3.27:

$$S_n = \left[M^{41}K - M^{42}Ca + m^{1}H\right]c^2 = \boxed{10.275\ MeV}$$

I3 Visa att fotonens rörelsemängd är E/c

$$E^2_{tot} = (pc)^2 + (m_0c)^2 \qquad \text{(Detta vet vi...)}$$

$$m_0 = 0 \Rightarrow p = \frac{E}{c} \qquad \square$$

I4 Hur stor hastighet har en β-partikel som har den kinetiska energin 1 MeV?

Kinetisk energi: $T = 1$ MeV

Massa: $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg (undvik att använda)

$m_0 c^2 = 0.511$ MeV/c^2

Vi väljer alltså att försöka räkna i MeV och använder följande formler:

$$\begin{cases} T = E - m_0 c^2 & (1) \\ E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 & (2) \\ p = m(v) \cdot v = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \Big/ \alpha = \frac{v}{c} \Big/ = \dfrac{m_0 \alpha c}{\sqrt{1-\alpha^2}} & (3) \end{cases}$$

Vi gjorde variabelbytet $\alpha = \frac{v}{c}$, vi vill alltså ta fram α.

$$(3) \Rightarrow (2): \left(\frac{m_0 \alpha c \cdot c}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2$$

Bryt ut E ur (1) och sätt in:

$$\frac{\alpha^2 \cdot (m_0 c^2)^2}{1-\alpha^2} = \overbrace{(T + m_0 c^2)}^{E}{}^2 - (m_0 c^2)^2 = T^2 + 2 T m_0 c^2 + \cancel{(m_0 c^2)^2} - \cancel{(m_0 c^2)^2}$$

Multiplicera med $(1-\alpha^2)$ och bryt ut α^2.

$$\alpha^2 = \frac{T^2 + 2 T m_0 c^2}{T^2 + 2 T m_0 c^2 + (m_0 c^2)^2} = \frac{T^2 + 2 T m_0 c^2}{(T + m_0 c^2)} = 0.89 \Rightarrow \beta = 0.94$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 0.94c}$$

I5 Vid vilken hastighet har en accelererad proton en total energi $E_{tot} = 2m_pc^2$?

$$E_{tot} = 2m_pc^2 \quad (1)$$

$$E_{tot}^2 = (pc)^2 + (m_pc^2)^2 \quad (2)$$

$$p = m_p(v)\cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad (3)$$

$$2 \Rightarrow p = \frac{1}{c}\cdot\sqrt{E_{tot}^2 - (m_pc^2)^2}$$

$$1 \Rightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{(2m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2} = cm_p\sqrt{3} \approx$$

$$3 \Rightarrow p^2\left(1-(\frac{v}{c})^2\right) = m_p^2v^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 = v^2\left(m_p^2 + (\frac{p}{c})^2\right)$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{p^2}{\left(m_p^2 + (\frac{p}{c})^2\right)} = \frac{c^2\cancel{m_p^2}\cdot 3}{\cancel{m_p^2} + \frac{\cancel{c^2}\cancel{m_p^2}\cdot 3}{\cancel{c^2}}} = \frac{3c^2}{1+3} = \frac{3}{4}c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{svar: } \frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

I6 Beräkna bindningsenergin hos den sista neutronen i $^{208}_{82}Pb_{126}$ mha semiempiriska massformeln.

$$\text{Bindningsenergi} = (\text{massa}\,^{208}Pb - \text{massa}\,^{207}Pb - \text{massa Neutron})c^2$$

$$\text{massa}\,^{208}_{82}Pb_{126} = 82 \cdot m_p + 126 \cdot m_n - B_1/c^2$$

$$\text{Massa}\,^{207}_{82}Pb_{125} = 82 \cdot m_p + 125\, m_n - B_2/c^2$$

$$m^{208}Pb - m^{207}Pb = m_n + \frac{B_2 - B_1}{c^2}$$

Det vi söker är alltså:

$$\text{Bindningsenergi} = \left(m_n + \frac{B_2 - B_1}{c^2} - m_n\right)c^2 = B_2 - B_1$$

$$B_2 = a_v \cdot 207 - a_s \cdot 207^{2/3} - a_c \cdot \frac{82 \cdot 81}{207^{1/3}} - a_{sym} \cdot \frac{(207 - 2 \cdot 82)^2}{207} = \underline{1606.75\,eV}$$

$$B_1 = a_v \cdot 208 - a_s \cdot 208^{2/3} - a_c \cdot \frac{82 \cdot 81}{208^{1/3}} - a_{sym} \frac{(208 - 2 \cdot 82)}{208} + \frac{a_p}{208^{3/4}} = \underline{1612.6\,eV}$$

$$\Rightarrow B_2 - B_1 = \boxed{-6\,meV}$$

Svar: Bindningsenergin är 6 meV

I7 Beräkna mha Semiempiriska massformeln den totala bindningsenergin och Coulombenergin för...

Total bindningsenergi:

$$\boxed{B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta}$$

Coulombenergin

$$\boxed{a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}$$

I8 Givet massdefekterna, beräkna atommassorna för...

a) $\boxed{^{24}Na: \Delta = -8.418 \text{ MeV}}$

$$\Delta = (m - A)c^2 \iff m = \frac{\Delta}{c^2} + A \quad , \quad c^2 = \frac{931.5 \text{ MeV}}{1 u}$$

$$\Rightarrow m(^{24}Na) = \frac{-8.418}{931.5} + 24 = \boxed{23.99096 u}$$

b) $\boxed{^{144}Sm \quad , \Delta = -81.964 \text{ MeV}}$

$$m(^{144}Sm) = \frac{-81.964}{931.5} + 144 = \boxed{143.912 u}$$

c) ^{240}Pu , $\Delta = 50.123 \text{ MeV}$

$$m(^{240}Pu) = \frac{50.123}{931.5} + 240 = \boxed{240.0538 u}$$

I9 Beräkna halveringstiden $t_{1/2}$

$$* \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N \iff \boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

Fråga: När är $N(t) = \frac{N_0}{2}$? (då är $t = t_{1/2}$)

svar: $\frac{\cancel{N_0}}{2} = \cancel{N_0} e^{-\lambda t_{1/2}} \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2}$

$$\iff \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

FRÅGA: Vad är λ?

SVAR: $* \iff \lambda = -\frac{dN/dt}{N}$

där $\frac{dN}{dt} = 135 \,/\, \text{gram}$ och $N = \frac{0.15}{147u} = \frac{0.15}{147 \cdot 1.67 \cdot 10^{-24} \text{gram}}$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{135 \cdot 147 \cdot 1.67 \cdot 10^{-24}}{0.15} = 2.21 \cdot 10^{-19}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{2.21 \cdot 10^{-19}} = 3.14 \cdot 10^{18} \text{ s} = \boxed{1.0 \cdot 10^{11} \text{ år}}$$

SVAR

I 10 Beräkna energiåtgången då 1 Curie ^{24}Na sönderfallit

1 Curie $= 3.7 \cdot 10^{10}$ sönderfall / s
Vid varje sönderfall frigörs 5.53 MeV
$t_{1/2} = 15h$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$t = t_{1/2} \Rightarrow N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1.3 \cdot 10^{-5}}$$

$$N_0 = \frac{dN_0/dt}{\lambda} = \frac{1 \text{ curie}}{\lambda} = \boxed{2.846 \cdot 10^{15}}$$

Total energiåtg. $= N_0 \cdot 5.53$ MeV $= \boxed{2550 \text{ J}}$

I 11 Hur stor är energin för den spridda strålningen?

$$\boxed{E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma / mc^2)(1 - \cos\theta)}}$$

där $E_\gamma = 1.80$ MeV =
och $mc^2 = 0.5$.

$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0$

$$\Rightarrow E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + E_\gamma / mc^2} = \frac{1.8}{1 + \frac{1.8}{0.5}} = \boxed{0.40 \text{ MeV}}$$

$\theta = 180 \Rightarrow \cos\theta = -1$

$$\Rightarrow \boxed{E'_\gamma = 0.8 \text{ MeV}}$$

I 12 Uppskatta hur mycket en 24 MeV α-partikel bromsas i ett kolfolium

$$I = I_0 Z \quad , \quad I_0 = 11.5\,eV$$

$$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{4\pi z^2 N_0 Z \rho}{mc^2\beta^2 A}\left[\ln\left(\frac{2mc^2\beta^2}{I}\right) - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right]$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad v \ll c \Rightarrow \underline{\underline{\beta^2 \approx 0}} \quad \text{och} \quad \underline{\underline{\ln(1-\beta^2) \approx \ln 1 = 0}}$$

$$c^2 \cdot \beta^2 = c^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = \underline{\underline{v^2}}$$

Vi antar att densiteten $\rho = 1$...

Magnesiumfolien	Kolfolien
$Z = 12$, $N = 12$	$Z = 6$, $N = 6$

I13 Vad är aktiviteten 10min efter det tagits ut?

1g jod ^{127}I bestrålas 24 h med 10^{13} n/cm²/s.

Tvärsnittet $\sigma = 7 \cdot 10^{-24}$ cm²

$t_{1/2} = 25$ min $= 1500$ s

$$\boxed{^{127}I + n \longrightarrow {}^{128}I + \gamma}$$

10 min = 600 s

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \boxed{4.62 \cdot 10^{-4}}$$

Antal producerade ^{128}I-kärnor per sekund U ges av:

$$\boxed{U = \sigma \cdot \phi \cdot N_{127}}$$

Totalt antal ^{127}I-kärnor

Neutronflöde

Låt oss kalla tiden efter 1 dygn för t_b och så undersöker vi hur många ^{128}I-kärnor vi har då.

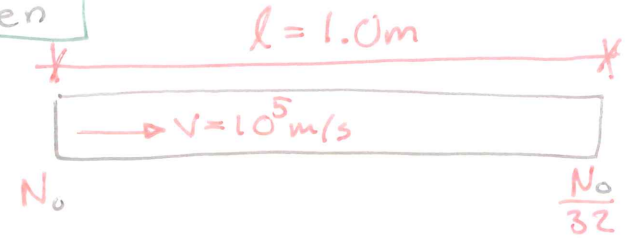
$$N(t_b) = \frac{U}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t_b}\right) \approx \boxed{\frac{U}{\lambda}} \; N(t_b)$$

Efter detta avtar antalet exponentiellt, vi får en "ny" tidsaxel t' som går från 0 till 10 min.

$$\boxed{N(t') = \frac{U}{\lambda} e^{-\lambda t'}} \Rightarrow A(10\,\text{min}) = \lambda \cdot N(10\,\text{min}) = \boxed{0.25 \cdot 10^{12}/s}$$

SVAR

I 14 Bestäm halveringstiden



Tiden genom röret T

$$T = \frac{\ell}{v} = \underline{\underline{10^{-5}\,s}}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$\underline{\text{då } t = T = 10^{-5}}$

$$N(T) = \frac{\cancel{N_0}}{32} = \cancel{N_0} e^{-\lambda T} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 32}{T} = \underline{\underline{\ln 32 \cdot 10^5}}$$

Halveringstiden $t_{1/2}$ ges av

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\ln 32 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-6}\,s = \boxed{2\,\mu s}$$

<u>Alternativt</u> använder du "enkel huvudräkning":

Om 1/32 finns kvar så har ämnet halverats fem gånger (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32). Vi vet alltså att halveringstiden är en femtedel av tiden genom röret.

SVAR

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{T}{5} = \frac{\ell / v}{5} = \frac{10^{-5}}{5} = 2 \cdot 10^{-6} = \boxed{2\,\mu s.}$$

I15 ^{234}U sönderfaller från sitt grundtillst. m. α-emission.

a) 1) Beräkna kinetiska energin hos den energirikaste α.

$$Q = M(^{234}U) - M(^{230}Th) - M(^{4}He) = 0.005214u =$$

$$= 931.4 \cdot 0.005214 \text{ MeV} = \underline{4.856 \text{ MeV}}$$

$$\boxed{Q = T_{efter} - T_{före}}$$

Om vi antar att ^{230}Th är i vila från början så är $T_{före} = 0$. Före sönderfallet antas $p_{tot} = 0$ vilket ger att

$$\boxed{p_{Th} = p_\alpha}$$

$$T_{efter} = T_{Th} + T_\alpha$$

$$T_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} \cdot v_{Th}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{Th}^2}{m_{Th}}$$

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} \Longleftrightarrow \boxed{p_\alpha^2 = T_\alpha \cdot 2m_\alpha}$$

Vi vet att $p_{Th} = p_\alpha$ så vi sätter in.

$$\Rightarrow T_{Th} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_\alpha \cdot 2m_\alpha}{m_{Th}} = \boxed{\frac{m_\alpha}{m_{Th}} \cdot T_\alpha} = T_{Th}$$

Sätt in i $Q = T_{efter} = T_\alpha + T_{Th}$.

SVAR

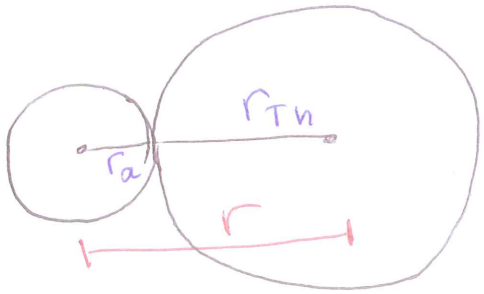
$$\Rightarrow Q = T_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_{Th}} \cdot T_\alpha \Rightarrow T_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}} = \frac{4.856}{1 + \frac{4}{230}} = \boxed{4.77 \text{ MeV}}$$

b) Beräkna maximum på den potentialbarriär som α-partikeln måste passera.

Coulombpotentialen: $\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot Z_{Th} e^2}{r}}$

Så vad är r då?

r är avståndet mellan båda partiklarnas centra.



$$r = r_\alpha + r_{Th} = r_0\left(4^{1/3} + 230^{1/3}\right)$$

$Z_\alpha = 2$, $Z_{Th} = 90$

SVAR

$$\Rightarrow V = \frac{2 \cdot 90 \cdot e^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{1{,}2 \cdot 10^{-15}\left(4^{1/3} + 230^{1/3}\right)} \cdot \frac{1}{e \cdot 10^6} = \boxed{28\,\text{MeV}}$$

c) Beräkna avståndet från kärnans centrum då α-partikeln passerat barriären.

$$Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha \cdot Z_{Th} \cdot e^2}{r} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha Z_{Th} e^2}{Q}}$$

Sätt in resultatet från a)

SVAR

$$\Rightarrow \boxed{r = 53\,\text{fm}}$$