Kvadratrötter

$\sqrt{\ }$ Om $a > 0$ så finns ett $x \in \mathbb{R}$ så att
$x^2 = a$
Det är också fallet att $(-x)^2 = a$

Def.
För varje reellt tal $a \geq 0$ defn vi $\sqrt{a}$ som det icke-negativa tal x så att $x^2 = a$ $[\sqrt{0} = 0]$

- $\sqrt{a} \geq 0$ ex $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{då } a \geq 0 \\ -a & -a < 0 \end{cases}$

Om $a, b \geq 0$ så är
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$

Potenser
Def.
För $a \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{N}$ defineras a^n som

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{då } n = 0 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ st}} & \text{då } n \geq 1 \end{cases}$$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m / a^n = a^{m-n}$, $m \geq n$

Def.

För $a \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{N}$ defn. a^{-n} som

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a/b)^n = a^n / b^n$

$a^b > b^a$ om $b > a$

Polynom

Ett polynom $p(x)$ är ett uttryck av formen

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$

Vi kallar $a_0, a_1, \dots, a_n$ koefficienterna $(\in \mathbb{R})$ och tänker på x som en obekant.

ex

$p(x) = 2x - 8$

Om $a_n \neq 0$ så har $p(x)$ grad n, skrivet $\deg p(x) = n$

Ett konstant polynom har grad 0

(vi def inte graden av nollpol) $\quad p(x) = a_0 \neq 0$

Vi kallar α ett nollställe till $p(x)$ om $p(\alpha) = 0$

Hur kan du hitta nollställen?

ex $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

ex x^2+4x-5

Kvadratkomplettering

$$x^2+4x-5 = (x+2)^2-4-5 = (x+2)^2-9$$
$$= (x+2+3)(x+2-3) = (x-5)(x-1)$$ ← Konjregel

Låt $p(x)$ och $q(x)$ vara pol

Så kallas $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ ett rationellt uttryck

ex $\frac{x^3-x}{x^2+x-2}$

ex $\frac{x^4-3x^2+2}{x^2+1}$

$$\begin{array}{l} \quad x^2-4 \\ \hline x^4-3x^2+2 \;\big|\; x^2+1 \\ -(x^4+x^2) \\ \hline -4x^2+2 \\ -(-4x^2-4) \\ \hline \quad 6 \text{ rest} \end{array} \qquad = x^2-4+\frac{6}{x^2+1}$$