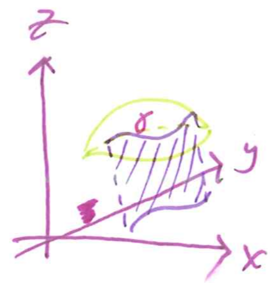
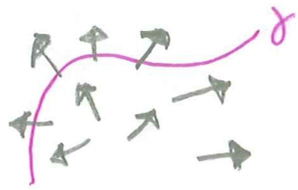
KURVINTEGRALER
av vektorfält

Skall integrera ett vektor över en kurva i xy-planet



Antag vi har kurva γ, Parametriserad av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$



"Flödesmätningar"

Partikel k rör sig längs γ, Påverkas av kraft $\bar{F}(\bar{r}(t))$ i $\bar{r}(t)$

$$\bar{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(\Delta t)}{\Delta t}$$

Under en "liten tid" dt förflyttar sig k ungefär $d\bar{r} \approx \bar{r}'(t)dt$

$\boxed{\text{Se figur 285}}$

under tiden dt uträttar kraftfältet ≈ arbetet

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet d\bar{r} \approx \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t)dt$$

"kraften · vägen"

Över hela kurvan: $W = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \bullet \bar{r}'(t)\, dt$

Vi definerar kurvintegralen på detta sätt

$\boxed{\text{Definition 9.1}}$

"Hur många pilar påverkar oss?"

$\boxed{\text{Vektorfält } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

Med $\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ och $d\bar{r} = (dx, dy)$

blir $\boxed{\int_\gamma \bar{F} \bullet d\bar{r}} = \int_\gamma (P(x,y), Q(x,y)) \bullet (dx, dy)$

$$\boxed{= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy} = \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right)dt$$

FINT

Ex. Beräkna $I = \int_\gamma xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$,

γ enhetscirkeln i positiv led från $(1,0)$ till $(0,1)$

Lösning: $(P,Q) = (xy,\ x^2+y^2)$

Vi parametriserar γ med $\begin{cases} x(t): \cos t \\ y(t): \sin t \end{cases}$ $t: 0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \cos t$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_0^{\pi/2} \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left((\cos t \sin t(-\sin t) + (\cos^2 t + \sin^2 t)\cos t\right)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \sin^2 t + \cos t)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \sin t\right]_0^{\pi/2}$$

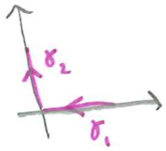
$$= -\frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{2}{3}$$

Ex $I = \int_\gamma xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ där

γ_1 = räta linjestycket från $(1,0)$ till $(0,0)$

γ_2 = —— " —— $(0,0)$ till $(0,1)$

Parametrisering: $\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$ $t: 1 \to 0$



$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases}$ $t: 0 \to 1$

$$I = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_1^0 (t \cdot 0 \cdot 1 + (t^2+0^2)\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (0 \cdot t \cdot 0 + (0^2+t^2)\cdot 1)\,dt$$

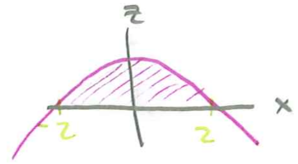
$$= \int_1^0 0\,dt + \int_0^1 t^2\,dt = 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Samma vektorfält, samma start till slut men med olika resultat (jämför med förra exemplet)

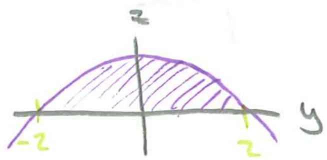
8.8 $x^2 = 4 - 4z$ och $y^2 = 4 - 4z$ & xy-planet begränsar!

Räkna ut volymen.

$x^2 = 4 - 4z \iff z = 1 - \frac{x^2}{4}$ som är oförändrad i y-led



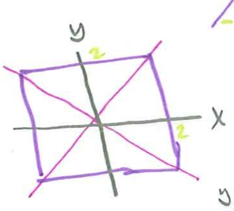
$y^2 = 4 - 4z \iff$ samma i yz-planet



Cylindrarna skär varandra:

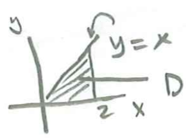
$y^2 = x^2 \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{4}$

$x = \pm y$



Tält för fan

Vi får 8 lika stora delar, så vi tar $0 \leq z \leq 1 - \frac{x^2}{4}$ över området



$$\frac{V}{8} = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 0\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{y=x} 1 - \frac{x^2}{4}\,dy\right)dx$$

$$\int_0^2 \left[y - y\frac{x^2}{4} \right]_0^x dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} - 0 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right]_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{16}{16}$$

$$= 1$$

total volym $= \underline{\underline{8}}$