

8. KROKLINJIGA KOORDINATER

8.1

Uttryck r, θ, φ i x, y, z

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Vi summerar kvadraterna av x, y och z .

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\underbrace{\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} + \cos^2 \theta)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = r \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r \sin \theta \cos \varphi} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

8.2

Uttryck \hat{r} , $\hat{\theta}$ och $\hat{\phi}$ i \hat{x} , \hat{y} och \hat{z} .

~~Vi vet att \hat{r} är normaliserad derivata av s i r -led.~~

$$s(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

Vi vet att \hat{r} = normaliserad derivata av s i r -led, vi resonerar pss för θ och φ .

$$\Rightarrow \hat{r} = \frac{s_r}{|s_r|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \frac{s_\theta}{|s_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} + -\sin \theta \hat{z}$$

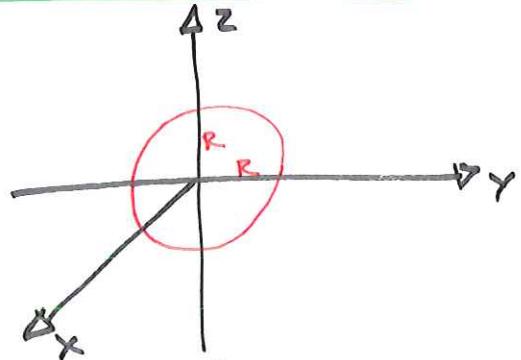
$$\hat{\varphi} = \frac{s_\varphi}{|s_\varphi|} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

8.3

a) Kontrollera Gauss sats för $\vec{V}_1 = r^2 \hat{r} = \langle r^2, 0, 0 \rangle$

Gauss sats

$$\iiint_S \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{V}_1 dV$$



VL: $\iiint_S \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} = \iiint_S (r^2, 0, 0) (1, 0, 0) r^2 \sin \theta d\theta dr d\phi =$

$$= \iiint_S r^4 \cdot \sin \theta d\theta dr d\phi =$$

$$= 2\pi \cdot R^4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \boxed{4\pi R^4}$$

Tänk på att
räkna ut
i sfäriska
koordinater
(se ES)

HL: $\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}_1 dV = \iiint_V 4r dV = 4 \iiint r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi =$

$$= \boxed{4\pi R^4}$$

b) Kontrollera Gauss sats för $\vec{V}_2 = \frac{1}{r^2} \hat{r}$

$$\iiint_S \vec{V}_2 \cdot d\vec{S} = \iiint_S \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}_2 dV = \iiint_V$$

Gauss sats gäller INTE!

8.4

Beräkna divergensen för funktionen

$$\vec{V} = (r \cos\theta) \hat{r} + (r \sin\theta) \hat{\theta} + (r \sin\theta \cos\phi) \hat{\phi}$$

~~skriv ut i sfäriska koordinater~~

Läs definitionen av divergens i sfäriska koordinater i formelsamlingen.

~~formelsamlingen~~

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\delta}{\delta \theta} (\sin\theta \cdot V_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\delta V_\phi}{\delta \phi} = \\ = \dots = 5 \cos\theta - \sin\phi$$

Gauss sats

$$\oint_S \vec{V} d\vec{s} = \iint_V \vec{V} \cdot \hat{A} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi + \iint_V \vec{V} \cdot \hat{\Theta} r \sin\theta dr d\phi = \\ = \iint_V r^3 \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi + \iint_V r^2 \sin^2\theta dr d\phi = \\ = \frac{5\pi R^3}{3}$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V} \cdot dV = \iiint_V (5 \cos\theta - \sin\phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = / \begin{matrix} \text{symmetri} \\ \text{i} \\ \phi \end{matrix} / = \\ = \iiint_V 5r^2 \sin^2\theta \cdot \frac{1}{2} dr d\theta d\phi = \boxed{\frac{5\pi R^3}{3}} \quad \#$$

8.5

Beräkna gradient och "laplacian".

$$T = r (\cos\theta + \sin\theta \cos\phi)$$

$$\nabla T = \left(\frac{\delta T}{\delta r} \cdot \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\delta T}{\delta \theta}, \frac{1}{r \sin^2\theta} \cdot \frac{\delta T}{\delta \phi} \right) = \dots = (\cos\theta + \sin\theta \cos\phi, \cos\theta \cos\phi - \sin\theta, \sin\phi)$$

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \dots = 0$$

$$\int_L \nabla T d\bar{l} = T(\bar{s}) - T(\bar{a}) = 2 \quad (\bar{a} = (0,0,0), \bar{b} = (0,0,2))$$

$$\begin{aligned} \int_L \nabla T d\bar{l} &= \int_0^2 \nabla T \cdot \hat{r} dr + \int_0^{5\pi/2} \nabla T \cdot \hat{\phi} r \sin\theta d\phi + \int_{5\pi/2}^0 \nabla T \cdot (-\hat{\theta}) r d\phi = \\ &= \int_0^2 (\cos\theta + \sin\theta \cos\phi) dr - \int_0^{5\pi/2} \sin\theta \sin\phi d\phi + \int_0^{5\pi/2} \cos\theta \cos\phi \cdot \sin\phi r d\phi = \end{aligned}$$

$$= 2 - 2 + 2 = 2$$

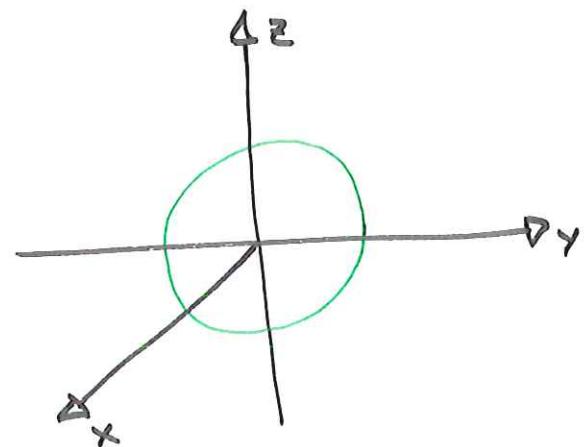
8.6

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (x + xyz, yz^4, xz + z^2)$$

Gauss sats

$$\iint_S \mathbf{A} d\bar{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV =$$



$$= \iiint_V (1 + \cancel{yz^4} + \cancel{z^4} + \cancel{x} + \cancel{2z}) dV =$$

$$= \iiint_V (1 + z^4) dV = \iiint_V dV + \iiint_V z^4 dV =$$

$$= \frac{4\pi}{3} + \iiint r^4 \cos^4 \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi =$$

$$= \dots = \boxed{\frac{152\pi}{105}}$$

8.7

Hur snabbt ökar trycket i riktning $(1, 0, 1)$?

$$P = r^2 \sin \theta \cos \phi, P: \left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\nabla P = \dots \quad (\text{räkna själv})$$

~~Detta är en del av~~

$$\nabla P \cdot (1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} r \sin \theta \cos \phi - \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \phi$$

Insättning av P ger 1

Den maximale ökningen är i gradientens riktning, alltså $2\sqrt{2} \hat{r} - \sqrt{2} \hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\sqrt{10}}$

8.8

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r^3} (-\sin 2\theta, \cos 2\theta, 0)$$

a) $\text{rot}(\mathbf{F}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\delta}{\delta \theta} (\sin \theta F_\theta) - \frac{\delta F_\theta}{\delta \phi} \right] \hat{r} + \dots + \dots =$

$$= (0, 0, 0) \quad (\text{se formelsamling + flerdim}).$$

b) $\text{div}(\mathbf{F}) = \dots = \frac{\cos 3\theta}{r^4 \sin \theta}$

c) Lös ett litet ekvationssystem bara.
ex...
Jag kommer göra resten ordentligt.

JA

8.9

a) Beräkna divergensen för funktionen.

$$\vec{v} = s(2 + \sin^2\phi)\hat{s} + s \cdot \sin\phi \cos\phi \hat{\phi} + 3z\hat{z}$$

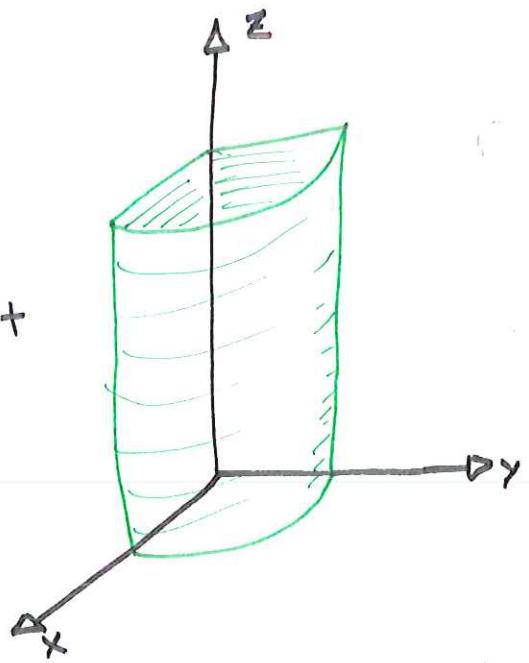
Divergens i cylindriska koordinater

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{s} \cdot 2s(2 + \sin^2\phi) + \frac{1}{s} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2\phi + 3 = \\ &= 4 + 2 \sin^2\phi + \cos 2\phi + 3 = 8\end{aligned}$$

b) Testa Gauss sats

$$\iiint_S \nabla \cdot \vec{v} dS = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \hat{s} \cdot s d\phi dz +$$

$$+ \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \hat{z} \cdot s \cdot dz d\phi = \dots = 40\pi$$



Där S_1 = framsidan och
 S_2 = toppen.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} dV = 8 \iiint_V dV = 40\pi$$

c) $\text{rot } (\vec{v}) = (0, 0, 0)$

8.10

Beräkna vinkeln mellan ytorna

$$\rho = \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi \quad P: \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

Precis som i linaj så kan vi räkna ut gradienten för ytorna och bestämma vinkeln mellan dem i punkten P.

$$\begin{cases} \text{Yta 1: } s_1 = \rho - \cos \varphi \\ \text{Yta 2: } s_2 = z - \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$\nabla s_1 = \hat{g} + \frac{1}{\rho} \sin \varphi \hat{\varphi} \quad \nabla s_2 = -\sin \varphi \hat{g} - \cos \varphi \hat{\varphi} + \hat{z}$$

} se FS.

Insättning av P

$$\nabla s_1(P) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{g} + \hat{\varphi})$$

$$\nabla s_2(P) = \frac{1}{2} \hat{g} - \frac{1}{2} \hat{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{z}$$

$$|\nabla s_1 \cdot \nabla s_2| = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

8.11

Hur snabbt ökar T i riktningen $e_p - 2e_\varphi$.

$$T = \rho^2 + z^2 \cos^2 \varphi, P: (2, \frac{\pi}{4}, 1)$$

$$\begin{aligned}\nabla T &= \frac{\partial T}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z} = \\ &= 2\rho \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} z^2 \sin 2\varphi \hat{\varphi} + 2z \cos^2 \varphi \hat{z}\end{aligned}$$

~~(1, -2, 0)~~ = Gradienten

$$\nabla T \cdot (1, -2, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = (2\rho - \frac{2}{\rho} z^2 \sin(2\varphi)) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Insättning av P

$$(4 - \frac{2}{2} \cdot 0) \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

8.12

Visa att cirkulationen av vektorfältet runt varje sluten kurva, som ej omkretsar z-axeln, är noll.

$$\mathbf{A} = \frac{\cos \varphi}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

Cirkulationen definieras enligt

$$\oint_S \text{rot}(\mathbf{A}) dS$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \oint_S 0 dS = 0$$