KAPITEL 7

7.1 Bestäm rörelsen för en oändlig sträng om

PDE: $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0$

a) $\boxed{u(x,0) = a \cdot \sin kx \ , \ u'_t(x,0) = 0}$

Jag använder d'Alemberts formel.

$g(x) = u(x,0) = a \cdot \sin kx$

$h(x) = u'_t(x,0) = 0$

$$\frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy = 0$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(a\sin(k(x-ct)) + a\sin(k(x+ct)) + 0\right) =$$

$$= \boxed{a\sin(kx)\cdot\cos(ckt)}$$

b) $\boxed{u(x,0) = 0 \ , \ u'_t(x,0) = b\sin(kx)}$

d'Alamberts ger:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy\right) = \frac{1}{2c}\Big[H(y)\Big]_{x-ct}^{x+ct} =$$

$$= \frac{1}{2c}\left(H(x+ct) - H(x-ct)\right) = \frac{b}{2ck}\left(\cos(k(x-ct)) - \cos(k(x+ct))\right) =$$

$$= \boxed{\frac{b}{ck}\sin(kx)\sin(ckt)}$$

$\boxed{7.2}$

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0 \\ g: \quad u(x,0) = a\sin kx \\ h: \quad u'_t(x,0) = ? \end{cases}$$

Bestäm $u'_t(x,0)$ så att vi får en fortskridande våg i negativ x-led.

Vi använder d'Alamberts formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct) + \frac{1}{c}H(x+ct) - \frac{1}{c}H(x-ct)\right)$$

Vi vill att summan av bidragen i positivt x-led ska vara noll.

$$\Rightarrow g(x-ct) - \frac{1}{c}H(x-ct) = 0$$

$$\Leftrightarrow G(x-ct) = \frac{1}{c}\cdot h(x-ct)$$

$$\Leftrightarrow c\cdot G(x) = h(x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-c\cdot\frac{a}{k}\cos kx = h(x)}$$

7.3 Lös ekvationen

$$u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R}$$

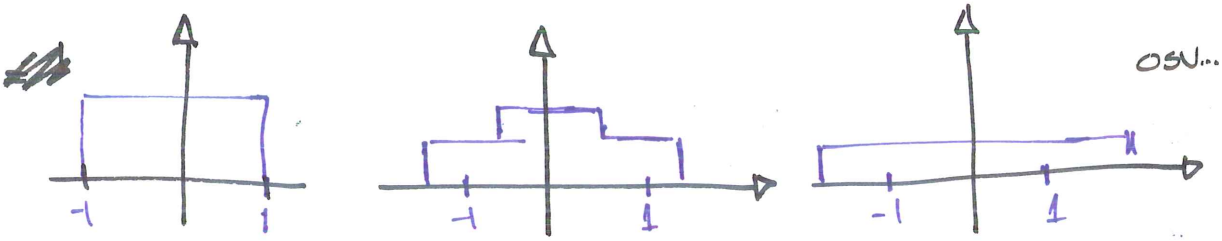
med begynnelsevillkoren nedan.

a) $\boxed{u(x,0) = p(x) \,, \quad u'_t(x,0) = 0}$, $\underline{p = \theta(x+1) - \theta(x-1)}$

d'Alemberts:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(p(x-ct) + p(x+ct) + 0\right) =$$

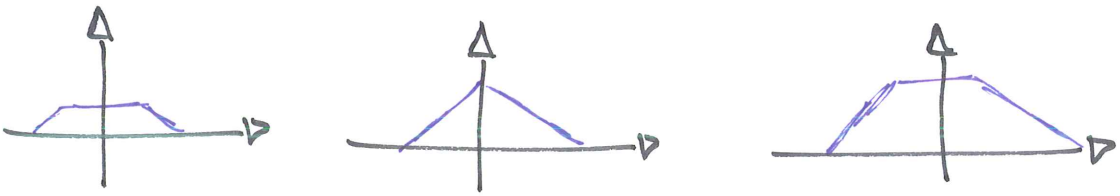
$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\theta(x+1-ct) - \theta(x-1-ct) + \theta(x+1+ct) - \theta(x-1+ct)\right)} =$$



b) $\boxed{u(x,0) = 0 \,, \quad u'_t(x,0) =}$ $= p(x)$

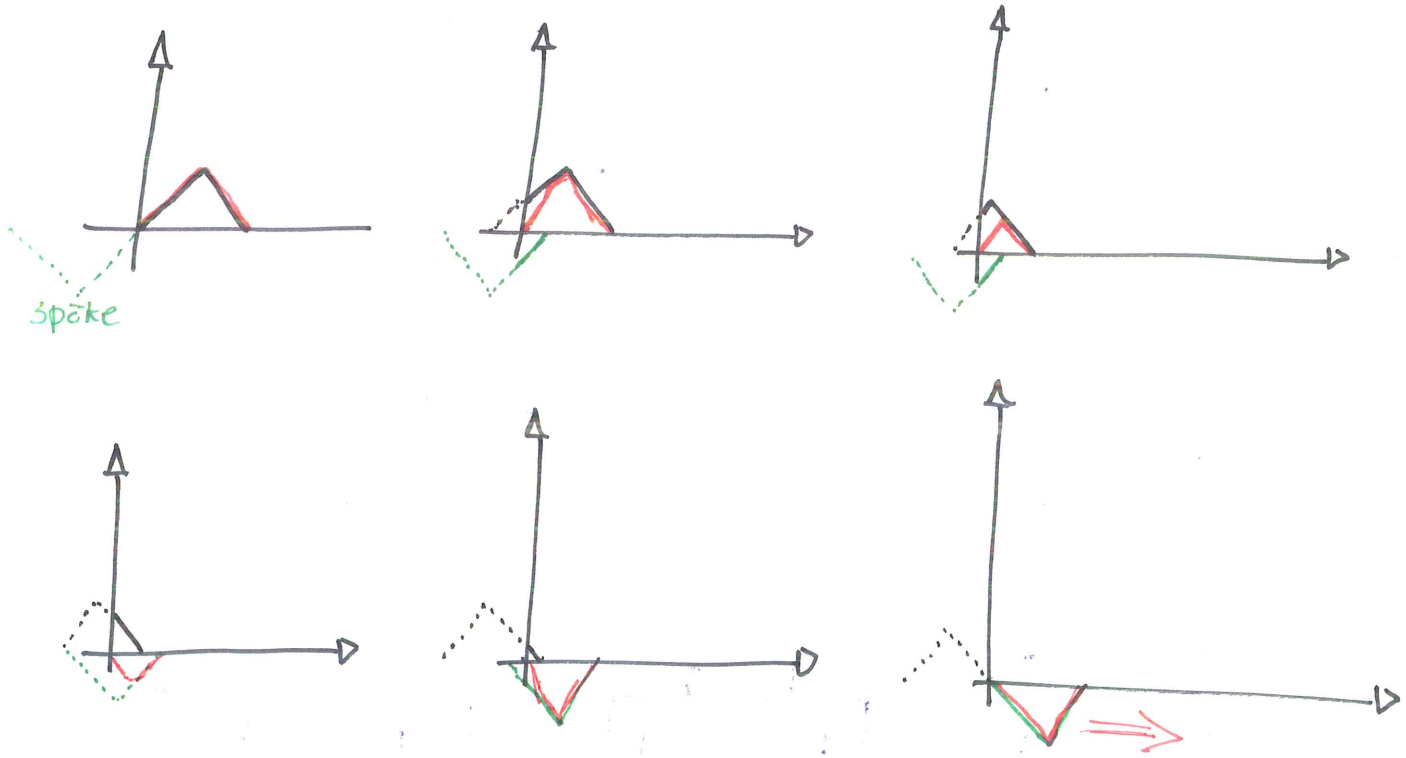
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + H(x+ct) - H(x-ct)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} p(y)\,dy$$

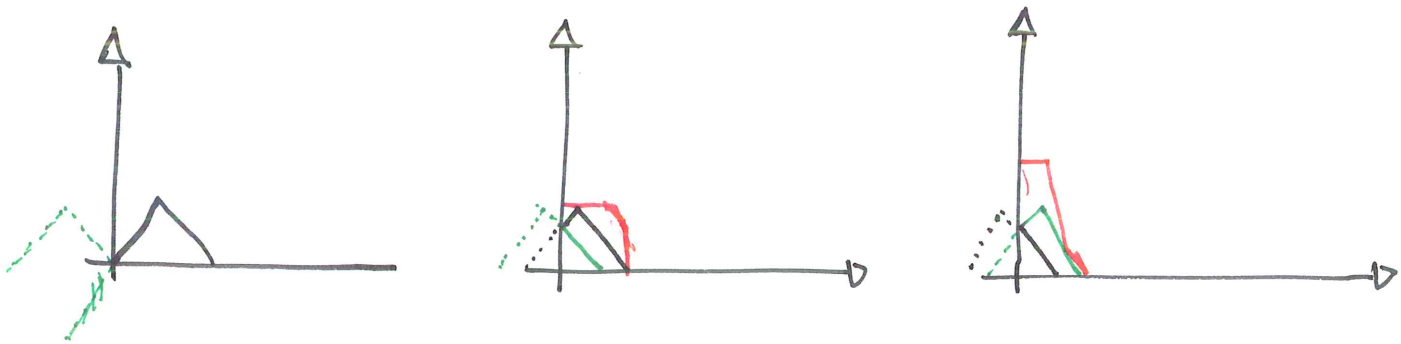


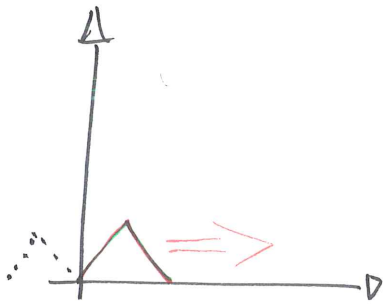
7.6 Beskriv reflektionen av en triangelvåg mha en figur om $c=1$ och...

a) $u(0,t)=0$ (fast ände)



b) $u'_x(0,t)=0$ (fri ände)

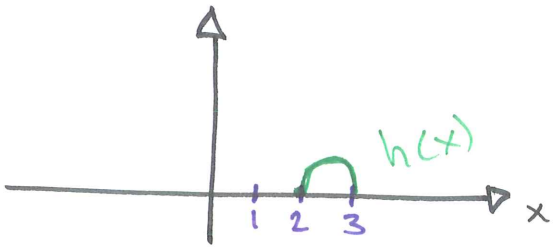




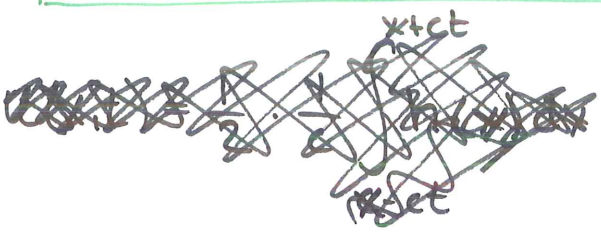
(kanske inte jättetydligt)

$\boxed{7.8}$

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = 0 = g(x) \\ u'_x(0,t) = \sin(\pi x)\cdot(\theta(x-2) - \theta(x-3)) = h(x) \end{cases}$$

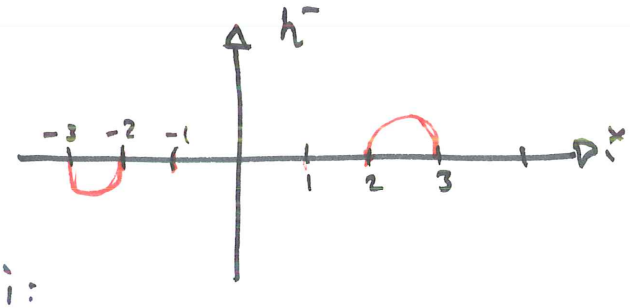


a) Avgör vid vilka tidpunkter strängens transversella utböjning är skild från noll i punkten $x=5$.



Eftersom $g(x)=0$ så speglar vi udda. Vi får då ett problem med $v = u^-$ för hela $\mathbb{R}$ med begynnelsevillkor

$$\begin{cases} u'^-_t(x,0) = h^-(x) \\ u^-(x,0) = 0 \end{cases}$$



Enligd d'Alembert har vi:

$$u^-(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h^-(y)\,dy = \Big/ x=5 \Big/ = u^-(5,t) = \frac{1}{2c}\int_{5-ct}^{5+ct} h^-(y)\,dy$$

Vi ska alltså integrera h^- över ett intervall med centrum i $x=5$ och bredd $2ct$.

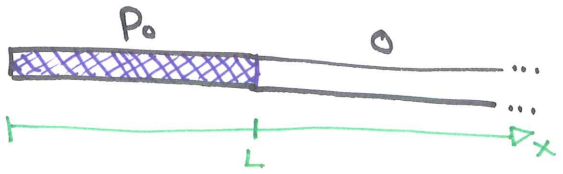
Från min dåliga figur:

$u(5,t) \neq 0$ då $2 < ct < 8$

$u_{max} = \frac{1}{2c}\int_2^3 \sin \pi x \, dx = \frac{1}{\pi c}$ i punkten $x=5$ då $3 \leq ct \leq 7$.

Fattade ej denna uppg.

7.9 Beskriv tryckvågen som bildas då membranet brister.



Vi gör en jämn utvikning och får:

$$p^+(x) = \begin{cases} P_0 & , |x| \leq L \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(p^+(x-ct) + p^+(x+ct)\right)}$$

7.10 Låt $u(x,t)$ vara den begränsade lösningen till

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 & , x > 0 , t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u'_t(x,0) = \delta(x) & x > 0 \end{cases}$$

$c = 1$

Beskriv $u(x,1)$, $u(x,2)$ & $u(x,3)$ mha figurer.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \delta_1(y) - \delta_{-1}(y)\, dy = \text{(d'Alemberts formel)}$$

Vi har här speglat udda.

$$= \frac{1}{2}\Big[\Theta(y-1) - \Theta(y+1)\Big]_{x-t}^{x+t} = \boxed{\frac{1}{2}\Big(\Theta(x+t-1) - \Theta(x+t+1) - \Theta(x-t-1) + \Theta(x-t+1)\Big)}$$

Enkelt att rita!

$\boxed{7.18}$ En tunn sfär med radien R imploderar plötsligt. Skissa tryckets variation

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(r,0) = \begin{cases} 0 & , 0 < r < R \\ u_0 & , r > R \end{cases} \end{cases}$$

Vi skriver Δ i sfäriska ~~koordinater~~ :

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) \iff \frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru) - c^2 \frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0 \\ u(r,0) = \begin{cases} 0 & , 0 < r < R \\ u_0 & r > R \end{cases} \end{cases}$$

$v = ru$

Vi får en ny diffekvation:

$$\begin{cases} v''_{tt} - c^2 v''_{rr} = 0 & t > 0 \quad r > 0 \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \quad \text{ubegränsad} \\ v(r,0) = r \cdot u(r,0) = v_0(r) & r > 0 \end{cases}$$

Vi beräknar v genom att göra en udda spegling i $r=0$.

$\boxed{7.20}$ Bestäm karakteristikorna

a) $$\boxed{\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} - 3\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + 2\frac{\delta u}{\delta x} + 6\frac{\delta u}{\delta y} = 0}$$

Tänk typ att du multiplicerar med $\frac{dx^2 dy^2}{d^2 u}$.

Kar. ekv: $dy^2 + 2dxdy - 3dx^2 + 0 + 0 = 0$

skit i de ojämna derivatorna.

$$\Leftrightarrow (dy - 3dx)(dx + dy) = 0$$

$$\begin{cases} dy - 3dx = 0 \\ dx + dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x = k_1 \\ x + y = k_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + y \\ \beta = 3x - y \end{cases} \Rightarrow \frac{\delta^2 u}{\delta\alpha\delta\beta} + \frac{1}{2}\frac{\delta u}{\delta\alpha} = 0$$

$\boxed{7.22}$ Bestäm karakteristiskorna.

$$x\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - y\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

Kar. ekv: $x \cdot dy^2 + y\,dx\,dy = 0$

$$\Leftrightarrow (x\,dy + y\,dx)dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\,dy + y\,dx = 0 \\ dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}dy + \frac{1}{x}dx = 0 \\ y = k_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) + \ln(x) = k_2 \\ y = k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = xy \end{cases}$$

Vi får den nya ekvationen:

$$u''_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow u = \varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \varphi(y) + \psi(xy)$$