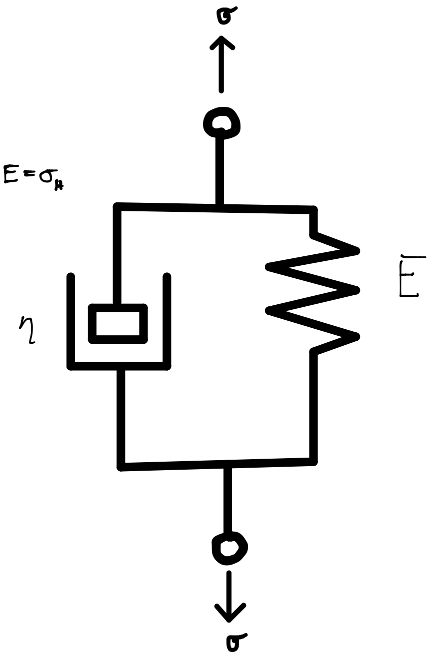
7.1

Krypprovning. Spänning hålls konstant.

a) Ställ upp den differentialekvation som ger töjningen.



För ett Hooke-material (markerat som en fjäder) gäller: $\epsilon_H E = \sigma_H$

För ett Newton material (dämpare) gäller: $\eta \dot{\epsilon}_N = \sigma_N$

Då en parallell koppling studeras gäller

$\epsilon_N = \epsilon_H = \epsilon$ & $\sigma_H + \sigma_N = \sigma$

Diff-ekvationen blir således:

$\sigma = \sigma_H + \sigma_N = \epsilon_H \cdot E + \eta \dot{\epsilon}_N = \epsilon \cdot E + \eta \dot{\epsilon}$ (då $\epsilon = \epsilon_H = \epsilon_N$)

Vid konstant spänning $\sigma = \sigma_0$ gäller således:

$\sigma_0 = \epsilon \cdot E + \eta \dot{\epsilon} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\epsilon} + \frac{E}{\eta}\epsilon = \frac{1}{\eta}\sigma_0}$

b) Hur varierar töjningen med tiden?

För att lösa diff-ekvationen delar vi in den i en homogen & en partikulär lösning.

Homogen

$\dot{\epsilon}_H + \frac{E}{\eta}\epsilon_H = 0$ Multiplicera HL & VL med $e^{\frac{E}{\eta}t}$: $e^{\frac{E}{\eta}t}\dot{\epsilon}_H + e^{\frac{E}{\eta}t}\frac{E}{\eta}\epsilon_H = 0 \Leftrightarrow \left(\epsilon_H e^{\frac{E}{\eta}t}\right)' = 0$

Integrera: $\epsilon_H e^{\frac{E}{\eta}t} - C = 0 \Leftrightarrow \epsilon_H(t) = C e^{-\frac{E}{\eta}t}$

Partikulär

Testa med en konstant: $\epsilon_p(t) = A$ $\frac{d}{dt}A = 0$

Insättning ger:

$0 + \frac{E}{\eta} \cdot A = \frac{1}{\eta}\sigma_0 \Leftrightarrow \epsilon_p(t) = A = \frac{1}{E}\sigma_0$

Fullständig

$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_H = \frac{1}{E}\sigma_0 + C e^{-\frac{E}{\eta}t}$ randvillkor: $\epsilon(0) = 0$ (dämparen tar tid att töjas)

$\epsilon(0) = \frac{1}{E}\sigma_0 + C e^{-\frac{E}{\eta}0} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{E}\sigma_0 \Leftrightarrow \boxed{\epsilon(t) = \frac{1}{E}\sigma_0\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)}$

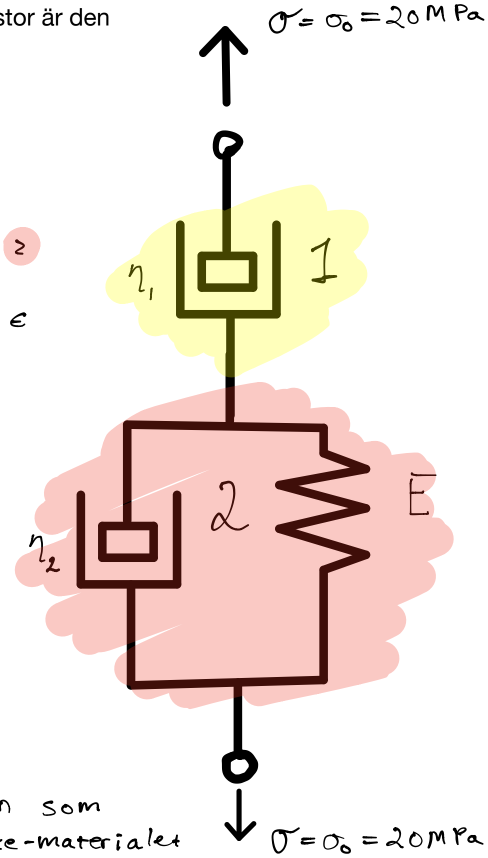
c) Tid till hälften av sluttöjningsvärdet:

Ställ upp ekvationen:

$$\frac{1}{2E}\sigma_0 = \frac{1}{E}\sigma_0\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \Leftrightarrow -\frac{E}{\eta}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\eta}{E}\ln 2$$

7.2

Stången belastas av en konstant spänning, 20 MPa i 180 dagar hur stor är den kvarvarande töjningen i stången efter "lång" tid.



Givet är också:

$E = 16\,GPa$, $\eta_1 = 16 \cdot 10^{10}\,MPa \cdot s$, $\eta_2 = 1 \cdot 10^{11}\,MPa \cdot s$

Den reologiska modellen kan delas upp i två områden: 1 & 2

Då dessa är i serie gäller: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ samt $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$

För område 1 gäller:

$\sigma_1 = \eta_1 \dot{\epsilon}_1 \iff \sigma = \eta_1 \dot{\epsilon}_1$ Men vi har:

$\sigma = \sigma_0$ alltså: $\dot{\epsilon}_1 = \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 \iff \epsilon_1 = \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 \cdot t + A$

$\epsilon_1(0) = 0 \iff A = 0$ $\quad \epsilon_1 = \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 \cdot t$

Alltså gäller: $\epsilon_1(180) = \frac{1}{\eta_1}\sigma_0 \cdot 180$

För område 2:

Initialt kommer den töjas enligt den töjningsfunktion som beräknades i Uppg 7.1 men vid relaxation kommer Hooke-materialet kontrahera (fjädern) alltså gäller att:

$\lim_{t\to\infty} \epsilon_2(t) = 0$

Sammantaget får vi:

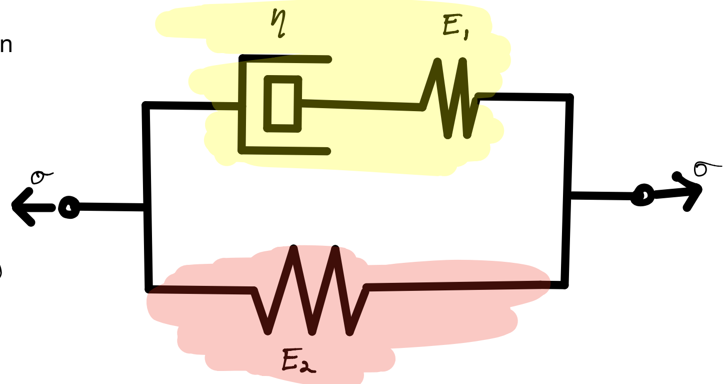
$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{t\to\infty} \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t) = \epsilon_1(180) + 0$ Alltså den bestående töjningen blir:

$\frac{1}{\eta_1} \cdot \sigma_0 \cdot 180 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx \boxed{0.0019}$

OBSERVERA FEL I FACIT! där står $\epsilon(180)$ alltså innan kontraktionen av område 2, se hemsidan

7.3

Konstant deformation. Hur mycket har spänningen
Sjunkit efter "lång" tid?



Givet: $E_1 = 1.4\,GPa$, $E_2 = 2.6\,GPa$
& $\eta = 3 \cdot 10^{10}\ MPa \cdot s$

Konstant deformation $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ (Parallell)

Vi kan ställa upp diff-ekvationen:

För område 1 gäller:

Seriekoppling: $\epsilon_N + \epsilon_H = \epsilon_1$ (N - Newton, H - Hooke) & $\sigma_N = \sigma_H = \sigma_1$

Det gäller att:

Hooke: $\epsilon_H = \frac{\sigma_H}{E_1}$ Newton: $\dot{\epsilon}_N = \frac{\sigma_N}{\eta}$ Sammantaget (för ett Maxwell-materia):

$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_N + \dot{\epsilon}_H = \frac{\sigma_N}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_H}{E_1} = \left[\sigma_1 = \sigma_H = \sigma_N\right] = \frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_1}{E}$ Men deformationen är konstant:

$0 = \frac{\sigma_1}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1}$ Alltså diff-ekvationen: $\dot{\sigma}_1 + \frac{E_1}{\eta}\sigma_1 = 0$ $\sigma_1(t) = c \cdot e^{-\frac{E_1}{\eta} \cdot t}$

Vid $t=0$ gäller att ett Maxwell-material "beter" sig som ett Hooke-material. Dämparen tar tid.

$\epsilon_1 \cdot E_1 = \sigma_1(0) \iff \sigma_1(0) = \epsilon_0 E_1$ Alltså: $\sigma_1(0) = c \cdot e^{-\frac{E_1}{\eta} 0} = C = \epsilon_0 E_1$

$\sigma_1(t) = \epsilon_0 E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta} t}$ (1)

För område 2 gäller

$\sigma_2(t) = E_2 \cdot \epsilon_2 = E_2 \cdot \epsilon_0$ $\sigma_2(t) = E_2 \epsilon_0$

Då dessa 2 områden är parallellkopplade gäller (1) & (2)

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) = \epsilon_0\left(E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta} t} + E_2\right)$$

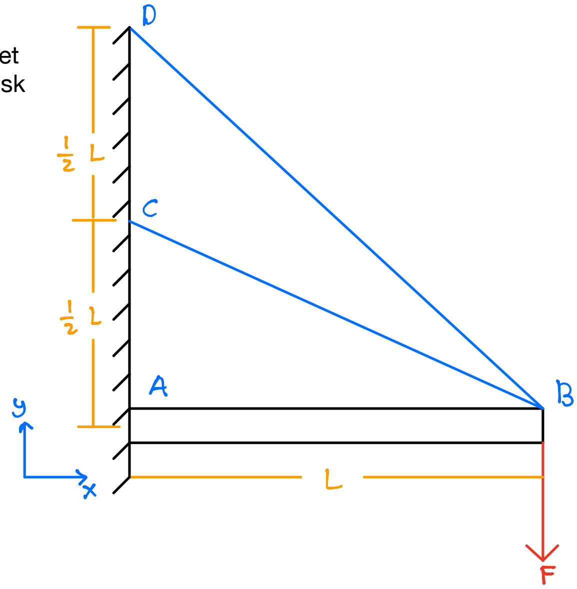
Vi är intresserade av kvoten efter "lång" tid

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(t)}{\sigma(0)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\epsilon_0\left(E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta} t} + E_2\right)}{\epsilon_0\left(E_1 + E_2\right)} = \frac{0 + E_2}{E_1 + E_2} = 0.65$$

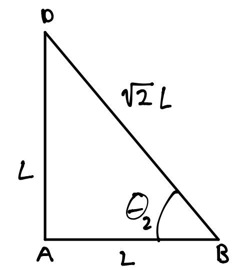
Alltså har spänningen sjunkit med $(1 - 0.65) \times 100\,\% = 35\,\%$

7.4

Hur stora blir krafterna i stagen (blå) när fackverket Belastas med en vertikal kraft F. Försumma elastisk töjning.

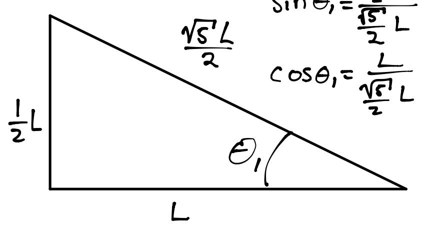


$\dot{\epsilon} = k\sigma^2$



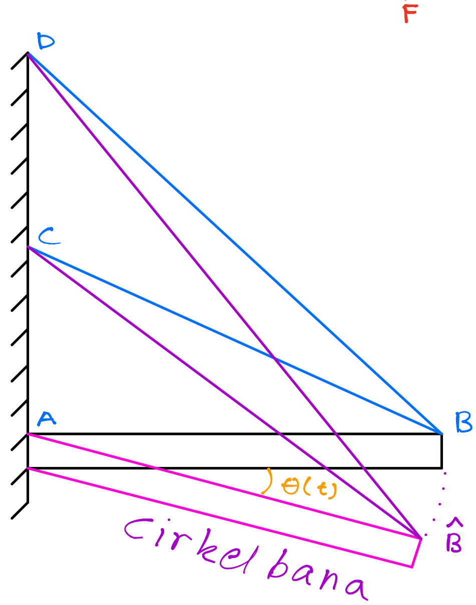
$$\sin\theta_2 = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

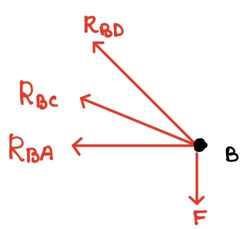


$$\sin\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{\sqrt{5}}{2}L} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{L}{\frac{\sqrt{5}}{2}L} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Jämvikt punkten B



$$(\uparrow): \quad R_{BD}\cdot\sin\theta_2 + R_{BC}\sin\theta_1 = F$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}R_{BD} + \frac{1}{\sqrt{5}}R_{BC} = F \quad (1)$$

Man behöver ej horisontell jkt-ekvation för beräkningarna

Villkoret som ges av uppgiften är att punkten B måste följa en cirkelbana

Vi inför ett koordinat system med centrum i A

$\vec{OD} = (0, L)$ $\vec{OC} = \frac{1}{2}(0, L)$ $\vec{OB} = (L, 0)$ $\vec{O\hat{B}} = (L\cos\theta(t), -L\sin\theta(t))$

Vi vill beräkna $\epsilon_{D\hat{B}}$ & $\epsilon_{C\hat{B}}$ som funktion av $\theta(t)$

$\epsilon = \frac{\delta}{L}$ Alltså gäller:

$$\epsilon_{D\hat{B}}(t) = \frac{|\overrightarrow{D\hat{B}}| - |\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{DB}|} \quad \text{respektive: } \epsilon_{C\hat{B}}(t) = \frac{|\overrightarrow{C\hat{B}}| - |\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}$$

Derivering ger: $\dot{\epsilon}_{D\hat{B}} = \dfrac{\dot{|\overrightarrow{D\hat{B}}|}}{|\overrightarrow{DB}|}$ då $|\overrightarrow{DB}|$ är konstant

På motsvarande sätt: $\dot{\epsilon}_{C\hat{B}} = \dfrac{\dot{|\overrightarrow{C\hat{B}}|}}{|\overrightarrow{CB}|}$

Vad är då $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{D\hat{B}}, \overrightarrow{CB}$ o $\overrightarrow{C\hat{B}}$?

$$\overrightarrow{D\hat{B}} = \overrightarrow{O\hat{B}} - \overrightarrow{OD} = L(\cos\theta(t), -\sin\theta(t) - 1) \qquad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{D\hat{B}}\Big|_{t=0} = L(1,-1)$$

$$\overrightarrow{C\hat{B}} = \overrightarrow{O\hat{B}} - \overrightarrow{OC} = L(\cos\theta(t), -\sin\theta(t) - \tfrac{1}{2}) \qquad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C\hat{B}}\Big|_{t=0} = L(1, -\tfrac{1}{2})$$

$$|\overrightarrow{D\hat{B}}| = L(\cos^2\theta(t) + (\sin\theta(t)+1)^2)^{1/2} = L\sqrt{2 + 2\sin\theta(t)}$$

$$|\overrightarrow{C\hat{B}}| = L(\cos^2\theta(t) + (\sin\theta(t)+\tfrac{1}{2})^2)^{1/2} = L\sqrt{\tfrac{5}{4} + \sin\theta(t)}$$

Derivera nu $|\overrightarrow{D\hat{B}}|$ o $|\overrightarrow{C\hat{B}}|$

$$\frac{d}{dt}|\overrightarrow{D\hat{B}}| = L\cdot\frac{1}{2}\left(2\cos(\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2 + 2\sin\theta(t)}}$$

$$\frac{d}{dt}|\overrightarrow{C\hat{B}}| = L\cdot\frac{1}{2}\cos(\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} + \sin\theta(t)}}$$

Detta ger oss slutligen

$$\dot{\epsilon}_{DB} = \frac{\dot{|\overrightarrow{D\hat{B}}|}}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{2L\cos(\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)}{2\cdot\sqrt{2}\,L\sqrt{2+2\sin\theta(t)}} = \frac{\cos(\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)}{\sqrt{2}\,\sqrt{2+2\sin\theta(t)}} \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{CB} = \frac{\dot{|\overrightarrow{C\hat{B}}|}}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{2L\cos(\theta(t))\cdot\dot{\theta}(t)}{2\sqrt{5}\,L\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta(t)}} = \frac{\cos(\theta(t))\,\dot{\theta}(t)}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta(t)}} \quad (3)$$

Givet i uppgiften var $\dot{\epsilon}_{DB} = k\dfrac{R_{DB}^2}{A^2}$ (4) $\quad \dot{\epsilon}_{CB} = k\dfrac{\dot{R}_{CB}}{A^2}$ (5) $\quad$ (A är okänt)

Ställ upp kvoten för tiden precis då kraften F börjar verka (2), (3), (4) o (5)

$$\frac{\dot{\epsilon}_{DB}}{\dot{\epsilon}_{CB}} = \left[\theta(0) = 0\right] = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}{2\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{R_{BD}^2}{R_{BC}^2} \iff \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{R_{BD}}{R_{BC}} \iff R_{BD} = \frac{\sqrt{5}}{2}R_{BC}$$

Insättning i omskriven (1):

$$\sqrt{5}\, R_{BD} + \sqrt{2}\, R_{BC} = \sqrt{10}\, F \iff \frac{5}{2} R_{BC} + \sqrt{2}\, R_{BC} = \sqrt{10}\, F \iff \boxed{R_{BC} = 0.808\, F}$$

Motsvarande för R_{BD}: $\boxed{R_{BD} = 0.903 F}$