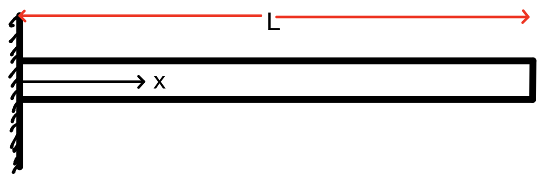
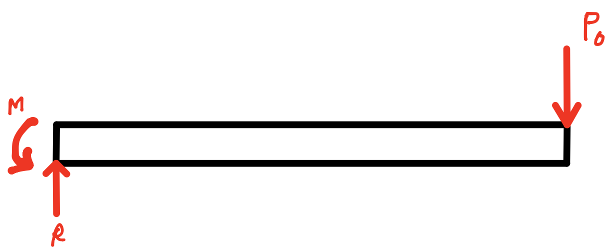
6.1



Bestäm reaktionsmomentet M i den fasta inspänningen om balken belastas med:

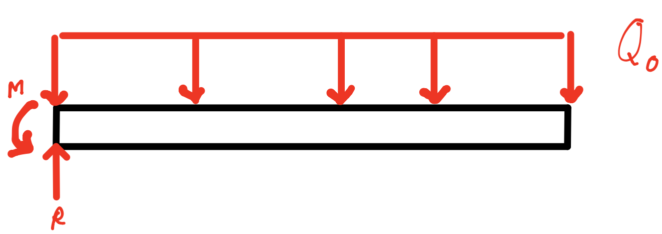
a) en punktlast P_0 vid x = L?



$(\curvearrowright): \ -M + P_0 \cdot L = 0 \iff \underline{\underline{M = P_0 L}}$

$(\uparrow): \ R - P_0 = 0 \iff \underline{\underline{R = P_0}}$

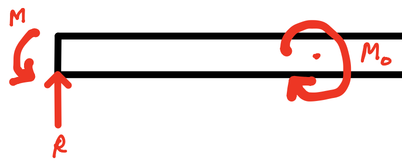
b) en över balken jämnt utbredd last q = Q_0/L



$(\uparrow): \ R - Q_0 = 0 \iff \underline{\underline{R = Q_0}}$

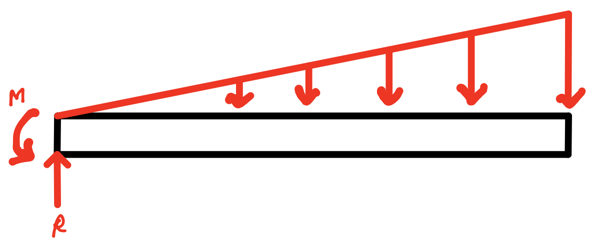
$(\curvearrowright): \ \frac{1}{2} Q_0 L - M = 0 \iff \underline{\underline{M = \frac{1}{2} Q_0 L}}$

c) ett punktmoment M_0 vid x = L/2



$(\uparrow): \underline{R=0} \qquad (\curvearrowright): -M+M_0=0 \iff \underline{M=M_0}$

d) en linjärt varierande last q(x)=q_0 x/L

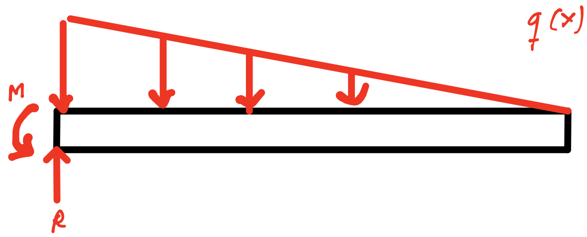


$q_0 \frac{x}{L} \iff Q = \frac{q_0 \cdot L}{2}$

$(\uparrow): R - q_0 \frac{L}{2} = 0 \iff \underline{R = q_0 \frac{L}{2}}$

$(\curvearrowright): -M + \frac{2}{3} L \frac{q_0 \cdot L}{2} = 0 \iff \underline{M = \frac{q_0 L^2}{3}}$

e) en linjärt varierande last q(x) = q_0(1-x/L)



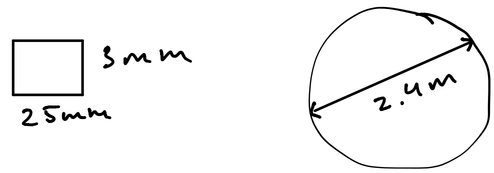
$q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \iff Q = \frac{q_0 L}{2}$

$(\uparrow): R - \frac{q_0 L}{2} = 0 \iff \underline{R = \frac{q_0 L}{2}}$

$(\curvearrowright): -M + \frac{L}{3} \frac{q_0 L}{2} = 0 \iff \underline{M = \frac{1}{6} q_0 L^2}$

6.2

Ett bandstål med bredden 25 mm och tjockleken 3mm böjs runt en trumma med 2.4 meter diameter. Hur stor är maximala spänningen i bandstålet om E = 206 GPa?



Krökning ger:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_b}{EI_y}$$ vilket medför att M_b är konstant över balken

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \iff I_y = \frac{25 \cdot 3^3}{12} \cdot (10^{-3})^4 = \frac{225}{4} \cdot 10^{-12}$$

$R = 1.2\,\text{m}$

Alltså har vi

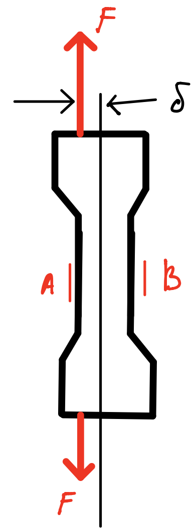
$$M_b = \frac{EI_y}{R}$$ men vi söker den maximala spänningen

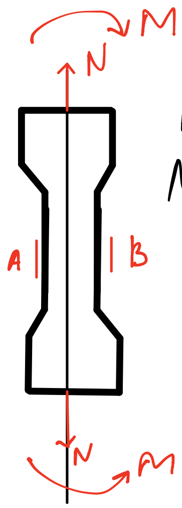
$$|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_b|}{W_b}$$ där $W_b = \frac{I}{|z|_{max}}$, I vårt fall är $|z|_{max} = 1.5\,\text{mm}$

Alltså: $$|\sigma_x|_{max} = \frac{\frac{EI}{R}}{\frac{I}{|z|_{max}}} = \frac{E}{R/|z|_{max}} = \frac{206 \cdot 10^9 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3}}{1.2}\,\text{Pa} \approx 257\,\text{MPa}$$

6.3

En dragprovstav har diameter 10mm. Med hjälp av två diametralt Placerade trådtökningsgivare A och B uppmättes töjningarna 8 x 10^-4 och 6.4 x 10^-4. Resultatet tyder på att dragkraftens Resultant inte är centrerad. Bestäm avståndet mellan resultatens Verkningslinje och provstavens centrumaxel.





Där $N = F$

$M = F\delta$

$$E\epsilon = \sigma \iff \epsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

$$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_b}{I} z$$

För A och B gäller

$$\epsilon_A = 8 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{E}\left(\frac{F}{A} + \frac{F\delta}{I} \cdot \underbrace{5 \cdot 10^{-3}}_{\text{Positiv } z\text{-led}}\right)$$

$$\epsilon_B = 6.4 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{E}\left(\frac{F}{A} - \frac{F\delta}{I} 5 \cdot 10^{-3}\right)$$

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (10^{-3})^4}{64}$$

Ställ upp kvoten

$$\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{6.4 \cdot 10^{-4}} = \frac{\frac{1}{E}}{\frac{1}{E}} \frac{F\left(\frac{1}{A} + \frac{\delta}{I} 5 \cdot 10^{-3}\right)}{F\left(\frac{1}{A} - \frac{\delta}{I} 5 \cdot 10^{-3}\right)}$$

Detta system är lösbart $A = r^2 \cdot \pi$ $I = \frac{\pi d^4}{64}$

$$\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} = \frac{I + A\delta \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{I - A\delta \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{6.4 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow I + A\delta \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1.25(I - A\delta \cdot 5 \cdot 10^{-3})$$

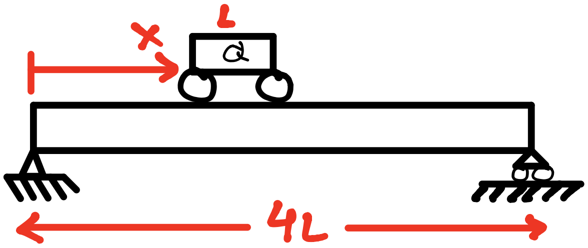
$A = 2.5 \cdot 10^{-5} \pi \ m^2$ $\qquad$ $I = 1.5625 \cdot 10^{-10} \pi$

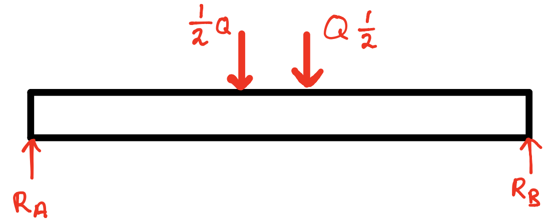
$$\delta(A \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 1.25 \cdot A \cdot 5 \cdot 10^{-3}) = 0.25 I \Leftrightarrow \delta = 1.38888 \ldots \cdot 10^{-4} m$$

Alltså $\delta = 0.139$ mm

6.4

På en balk, som är ledat upplagd i båda ändar, befinner sig en vagn med axelavståndet L. Balkens längd är 4L. För vilket läge x åstadkommer vagnens tyngd Q maximal påkänning, om vagnens tyngdpunkt ligger mitt mellan axlarna? Hur stor är denna påkänning om balkens böjmotstånd är W.



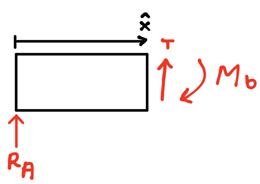


$$(\uparrow):\ R_A + R_B = Q$$

$$(\curvearrowleft):\ R_A \cdot 4L - \frac{1}{2}Q\cdot(4L-x) - \frac{1}{2}Q(4L-(x+L)) = 0 \iff R_A = \frac{Q}{8L}(7L-2x)$$

Vi undersöker 2 snitt och inför den nya koordinaten: $\hat{x}$

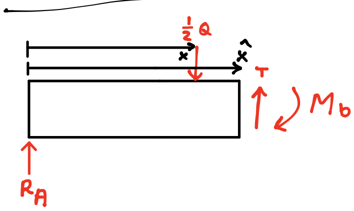
$\boxed{\hat{x} < x}$



$$(\uparrow):\ R_A + T_1 = 0 \iff T_1 = -R_A$$

$$(\curvearrowleft):\ R_A \cdot \hat{x} + M_{b_1} = 0 \iff M_{b_1} = -R_A\hat{x}$$

$\boxed{x < \hat{x} < x + L}$



$$(\uparrow):\ R_A - \frac{1}{2}Q + T_2 = 0 \iff T_2 = \frac{1}{2}Q - R_A$$

$$(\curvearrowleft):\ R_A \cdot \hat{x} - \frac{1}{2}Q(\hat{x}-x) + M_{b_2} = 0 \iff M_{b_2} = \frac{1}{2}Q(\hat{x}-x) - R_A\hat{x}$$

Uppgiftens symmetri medför att inga fler snitt måste betraktas

Sedan tidigare:

$$R_A = \frac{Q}{8L}(7L-2X)$$

Vi vill bestämma: $|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_b|_{max}}{W_b}$

$M_{b1} = -R_A\hat{x} = -\frac{Q}{8L}(7L-2x)\hat{x}$ (R_A är alltid positiv eftersom $2x > 7L \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}L$ $\frac{7}{2}L + L = \frac{9}{2}L = 4L + \frac{1}{2}L > 4L$, framhjulet hamnar utanför.)

$|M_{b1}|$ är som störst då $\hat{x}$ är som störst, $\hat{x} = x$

$|M_{b1}|_{max} = \frac{Q}{8L}(7L-2x)x$

$M_{b2} = \frac{1}{2}Q(\hat{x}-x) - R_A\hat{x}$ Vi vill undersöka maximum av M_{b2} med avseende på $\hat{x}$.

$\frac{\partial M_{b2}}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{2}Q - R_A = \frac{Q}{8L}(4L-7L-2x) = \frac{Q}{8L}(-3L-2x)$, Alltså är M_{b2} en konstant avtagande funktion med avseende på $\hat{x}$.

Alltså finns max/min-punkt antingen $\hat{x} = x$ el. $\hat{x} = x+L$, $\hat{x} = x$ sammanfaller med $|M_{b1}|_{max}$

Vi ska därför undersöka:

$M_{b1} = -\frac{Q}{8L}(7L-2x)x$

Samt

$M_{b2} = \frac{1}{2}QL - R_a(x+L) = \frac{Q}{8L}\left(4L^2 - (7L-2x)(x+L)\right)$

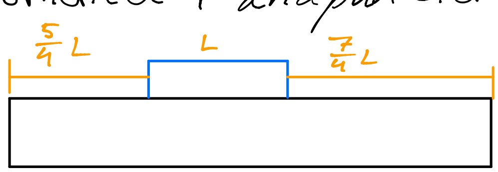
$\frac{d}{dx}M_{b1} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{Q}{8L}(7Lx-2x^2)\right) = -\frac{Q}{8L}(7L-4x)$

$\dot{M}_{b1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}L$ $\ddot{M}_{b1}(x) = \frac{Q}{8L}\cdot 4$ $\ddot{M}_{b1}(\frac{7}{4}L) > 0 \leftarrow$ min

$\frac{d}{dx}M_{b2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{8L}(4L^2 - 5Lx + 2x^2)\right) = \frac{Q}{8L}(-5L + 4x)$

$\dot{M}_{b2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}L$ $\ddot{M}_{b2}(x) = \frac{Q}{2}L$ $\ddot{M}_{b2}(\frac{5}{4}L) > 0 \leftarrow$ min

Momentet i ändpunkterna är alltid 0



Notera att $M_{b2}(\frac{5}{4}L) = M_{b1}(\frac{7}{4}L)$

Ett symmetriskt problem

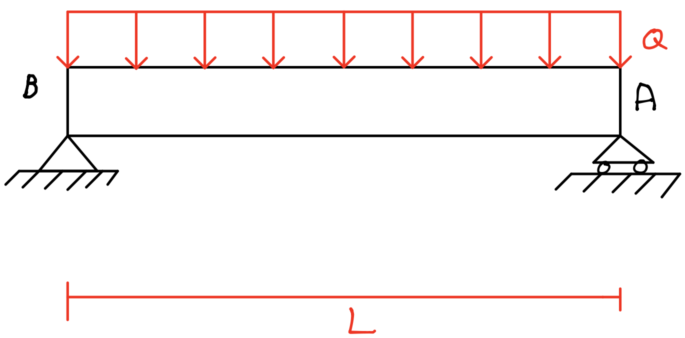
$$M_{b2}\left(\frac{5}{4}L\right) = \frac{Q}{8L}\left(4L^2 - \left(\frac{14-5}{2}L\right)\left(\frac{9}{4}L\right)\right) = \frac{Q}{8L}\left(\frac{32-81}{8}L^2\right) = \boxed{\frac{49}{64}QL}$$

Det är lite oklart vad som är riktningen på en jämnt utbredd last. På sid 174 anges en sådan positiv uppåt medan uppg 6.10–6.11 anger pos – nedåt. Jag kommer i fortsättningen utgå från att det menas nedåt. I vissa uppgifter räknade jag först med uppåt riktade laster men ändrade sedan tecken, därför kan det vara teckenfel

6.5

Längd : L, böjstyvhet EI. Jämnt utbredd last q = Q/L. (Antas peka nedåt se kommentar i gult)

a)



Randvillkor:

$w(0) = 0$

$w(L) = 0$

$M_b(0) = M_b(L) = 0$

Vi har:

$$\frac{dT}{dx} = -q \qquad \frac{dM_b}{dx} = T \qquad \text{Samt:} \quad EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b$$

Börja integrera (Notera q räknas positiv uppåt)

$$\frac{dT}{dx} = -\left(-\frac{Q}{L}\right) \iff T = \frac{Q}{L}x + A$$

$$\frac{dM_b}{dx} = T \iff M_b = \frac{Q}{2L}x^2 + Ax + B$$

Vårt första randvillkor:

$M_b(0)=M_b(L)=0 \quad \Leftrightarrow \quad M_b(0)=B=0$

$M_b(L)=\frac{Q}{2}L+AL=0 \Leftrightarrow A=-\frac{Q}{2}$

Nu kan vi bestämma stödkrafter, dessa ges av $-T(0)$ & $T(L)$

$T(0)=-\frac{Q}{2}$, men detta är en negativ snitt yta: $\boxed{F_A=+\frac{Q}{2}}$

$T(L)=Q-\frac{Q}{2}=\frac{Q}{2}$, (pos snittyta) $\boxed{F_B=\frac{Q}{2}}$

Elastiska linjens ekvation ger:

$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-M_b \quad \Leftrightarrow \frac{d^2w}{dx^2}=\frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{2L}x^2+\frac{Q}{2}x\right)=\frac{Q}{2EI}\left(x-\frac{x^2}{L}\right)$

Integration ger: $\frac{dw}{dx}=\frac{Q}{2EI}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3L}\right)+A$

$w(x)=\frac{Q}{2EI}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{1}{12}\frac{x^4}{L}\right)+Ax+B$

Randvillkor säger:

$w(0)=0 \Leftrightarrow w(0)=B=0$

$$W(L)=0 \iff \frac{Q}{2EI}\left(\frac{L^3}{6}-\frac{L^3}{12}\right)+AL=0 \iff A=\frac{-QL^2}{24EI}$$

Sammantaget får vi

$$W(x)=\frac{Q}{4EI}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}\frac{x^4}{L}-\frac{L^2}{6}x\right)$$

det enda x i intervallet

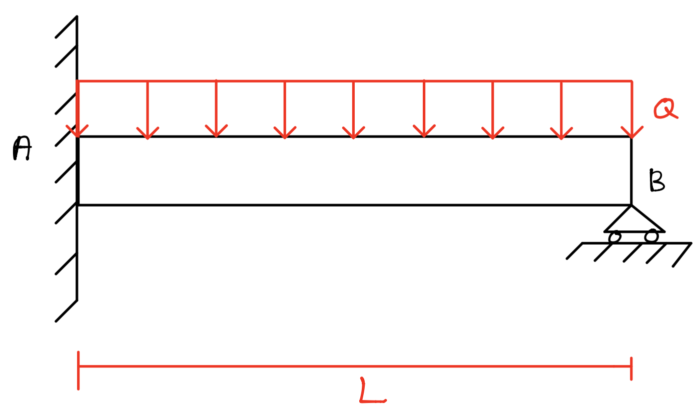
$$\dot{w}=\frac{Q}{4EI}\left(x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{L^2}{6}\right) \qquad \dot{W}(x)=0 \iff x=\frac{1}{2}L$$

$$\ddot{w}=\frac{Q}{4EI}\left(2x-2x^2\right) \qquad \ddot{w}\left(\tfrac{1}{2}L\right)>0$$ alltså en minpunkt

$$W\left(\tfrac{1}{2}L\right)=\frac{Q}{4EI}\left(\frac{L^3}{24}-\frac{L^3}{96}-\frac{L^3}{12}\right)=\frac{Q}{4EI}\left(\frac{4-1-8}{96}L^3\right)=\frac{-5}{384}\frac{QL^3}{EI}$$

$w(L)$ mäts pos-upp alltså: nedböjning $=\frac{5}{384}\frac{QL^3}{EI}$

b)



På samma sätt som i a) Randvillkor: $w(0)=w(L)=0$

$w'(0)=0$ (Får ej luta mot väggen)

$M_b(L)=0$

$$\frac{dT}{dx} = -q \iff T = +\frac{Q}{L}x + A$$

$$\frac{dM_b}{dx} = T \iff M_b(x) = +\frac{Q}{2L}x^2 + Ax + B$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b \iff \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{2L}x^2 - Ax - B\right)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{6L}x^3 - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right) + C$$

$$\dot{w}(0) = 0 \iff C = 0$$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24L}x^4 - \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{2}Bx^2\right) + D$$

$$w(0) = 0 \iff D = 0$$

$$\begin{matrix} M_b(L) = 0 \\ w(L) = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} +\frac{Q}{2L}L^2 + AL + B = 0 \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24}L^3 - \frac{1}{6}AL^3 - \frac{1}{2}BL^2\right) = 0 \end{cases}$$

Forenkling ger:

$$\left.\begin{matrix} B = -\frac{Q}{2}L - AL = -L\left(\frac{Q}{2} + A\right) \\ \frac{-Q}{12}L - \frac{1}{3}AL + L\left(\frac{Q}{2} + A\right) = 0 \end{matrix}\right\} \iff -\frac{QL}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = AL\left(1 - \frac{1}{3}\right) \iff A = \frac{-Q}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}$$

Alltså: $A = -\frac{Q5}{8} \iff B = -L\left(\frac{Q}{2} - \frac{Q\cdot 5}{8}\right) = +L\frac{Q}{8}$

Sammantaget får vi:

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24L}x^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{Q5}{8}x^3 - \frac{1}{2}\left(+L\frac{Q}{8}\right)x^2\right) =$$

$$= \frac{Q}{8EI}\left(\frac{1}{3L}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{L}{2}x^2\right)$$

Maximala utböjningen?

$$\dot{w}(x) = \frac{Q}{8EI}\left(\frac{-4}{3L}x^3 + \frac{15}{6}x^2 - \frac{2L}{2}x\right) = 0 \;? \qquad x_1 = 0$$

$$8x^2 - 15Lx + 6L^2 = 0 \qquad x^2 - \frac{15}{8}Lx + \frac{6L^2}{8} = \left(x^2 - \frac{15}{8}Lx + \left(\frac{15}{16}L\right)^2\right) + \frac{6L^2}{8} - \left(\frac{15}{16}\right)^2 L^2$$

$$= 0 \qquad \left(x - \frac{15}{16}L\right)^2 = \left(\frac{225}{256} - \frac{192}{256}\right)L^2$$

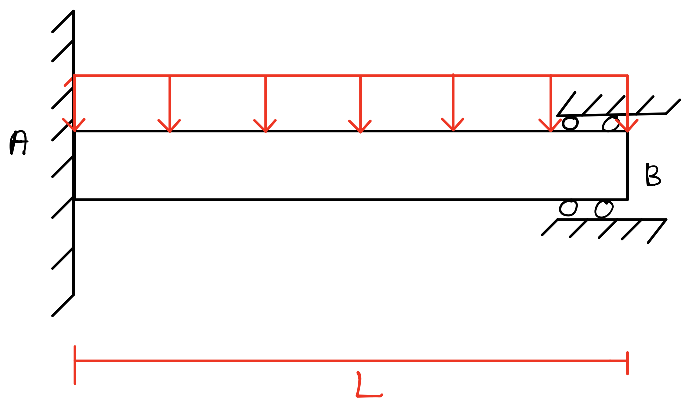
Alltså $\quad x = \frac{15}{16}L \pm \frac{\sqrt{33}}{16}L \quad$ Eftersom balkens bredd är 2 måste det gälla att $\quad 0 < x < L$

$$33 > 25 \qquad \sqrt{33} > 5 \qquad \frac{15}{16} + \frac{5}{16} > 1 \quad \text{(Alltså utan för)}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16}L$$

Insättning ger $\quad w\left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}L\right) \approx \boxed{\frac{-2.08}{384}QL^3/EI}$

c)



$w(0) = w(L) = 0$
$\dot{w}(0) = \dot{w}(L) = 0$

Från a o b

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24L}x^4 - \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{2}Bx^2\right) + Cx + D$$

$$w(0) = 0 \iff D = 0 \qquad \dot{w}(0) = 0 \iff C = 0$$

$$w(L) = 0 \iff \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24L}\cdot L^4 - \frac{1}{6}A\cdot L^3 - \frac{1}{2}BL^2\right) = 0$$

$$\dot{w}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{6L}x^3 - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right) \qquad \dot{w}(L) = 0 \iff -\frac{Q}{6}L - \frac{1}{2}AL - B = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{Q}{12}L - \frac{1}{3}AL - B = 0 \\ -\frac{Q}{6}L - \frac{1}{2}AL - B = 0 \end{cases} \iff \left.\begin{matrix} B = -\frac{L}{3}\left(\frac{Q}{4} + A\right) \\ B = -\frac{L}{2}\left(\frac{Q}{3} + A\right) \end{matrix}\right\} \iff -\frac{Q}{2} - 2A = -Q - 3A$$

$$A = -\frac{Q}{2}, \quad B = \frac{LQ}{12}$$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-Q}{24L}x^4 + \frac{1}{6}\frac{Q}{2}x^3 - \frac{1}{2}\frac{LQ}{12}x^2\right) = \frac{1}{EI}\frac{Q}{24}\left(\frac{-x^4}{L} + 2x^3 - Lx^2\right)$$

$\dot{w}(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4x^3}{L}+6x^2-2Lx=0$ $\left.\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=L \end{matrix}\right\}$ (randvillkor alltså kända noll punkter.)

Polynom div ger: $-\frac{4x^3}{L}+6x^2-2Lx=-x(x-L)(\frac{4}{L}x-2)$

Alltså $x_3=\frac{L}{2}$ (Eftersom $W(0)=W(L)=0$ måste denna punkt ha störst utböjning.

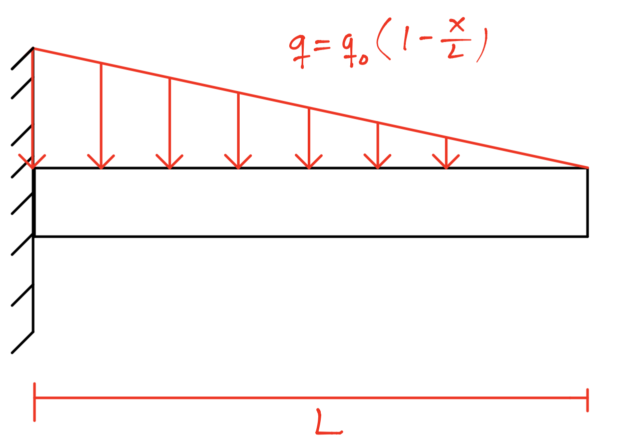
$W(\frac{L}{2})=\frac{1}{EI}\frac{Q}{24}\left(-\frac{L^3}{16}+2\frac{L^3}{8}-\frac{L^3}{4}\right)=-\frac{QL^3}{EI\,24}$ nedböjning: $-W(\frac{L}{2})$

Reaktionskrafterna beräknas genom derivering av $W(x)$

6.6

a)

Beräkna nedböjningen i den fria Änden. Givet är L och EI
Lasten antas peka nedåt se kommentar i gult



$T(L)=M_b(L)=0$

$w(0)=\dot{w}(0)=0$

Som tidigare

$\frac{dT}{dx}=-q \Leftrightarrow \frac{dT}{dx}=q_0(1-\frac{x}{L})=-q_0(\frac{x}{L}-1) \Leftrightarrow T=-q_0(\frac{x^2}{2L}-x)+A$

$T(L)=0 \Leftrightarrow -q_0(\frac{L}{2}-L)+A=0 \Leftrightarrow A=-q_0\frac{L}{2}$

$$\frac{dM_b}{dx} = T \iff M_b = -q_0\left(\frac{1}{6L}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) - q_0\frac{L}{2}x + B$$

$$M_b(L) = 0 \iff -q_0 \cdot \frac{1}{2}L^2\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + B = 0 \iff B = \frac{1}{6}q_0 L^2$$

$$M_b(x) = -q_0 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3L}x^3 - x^2 + Lx - \frac{1}{3}L^2\right)$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b \iff \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{q_0}{2}\left(\frac{1}{3L}x^3 - x^2 + Lx - \frac{1}{3}L^2\right)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2EI}q_0\left(\frac{1}{12L}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{3}L^2x\right) + C$$

$$\dot{w}(0) = 0 \iff C = 0$$

$$w(x) = \frac{1}{2EI}q_0\left(\frac{1}{60L}x^5 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{L}{6}x^3 - \frac{1}{6}L^2x^2\right) + D$$

$$w(0) \iff D = 0$$

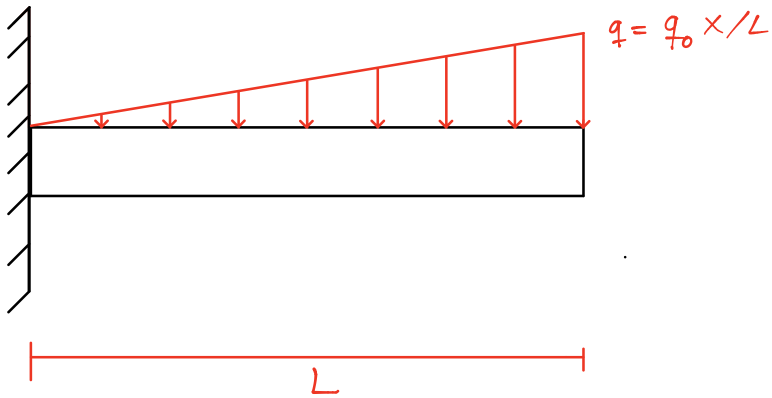
Beräkna nu $w(L)$

$$w(L) = \frac{1}{2EI}q_0\left(\frac{1}{60}L^4 - \frac{1}{12}L^4 + \frac{1}{6}L^4 - \frac{1}{6}L^4\right) = \frac{1}{2EI}q_0\left(\frac{1-5}{60}L^4\right) = \boxed{\frac{-1}{30EI}q_0L^4}$$

b) samma som a fast:

$T(L) = M_b(L) = 0$

$w(0) = \dot{w}(0) = 0$



$$\frac{dT}{dx} = -q = q_0 \frac{x}{L} \iff T = q_0 \frac{x^2}{2L} + A \qquad T(L) = 0 \iff A = -q_0 \frac{L}{2}$$

$$\frac{dM_b}{dx} = T \iff M_b = -\frac{q_0}{2}\left(Lx - \frac{1}{3L}x^3\right) + B \qquad M_b(L) = 0 \iff B = -\frac{q_0}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}L^2\right)$$

Alltså: $M_b(x) = -\frac{q_0}{2}\left(Lx - \frac{1}{3L}x^3 - \frac{2}{3}L^2\right)$

Elastiska linjens ekvation ger:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M_b = -\frac{q_0}{2}\left(\frac{1}{3L}x^3 - Lx + \frac{2}{3}L^2\right) \iff \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-1}{EI}\frac{q_0}{2}\left(\frac{1}{3L}x^3 - Lx + \frac{2}{3}L^2\right)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{-1}{2EI} q_0 \left(\frac{1}{12L}x^4 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{2}{3}L^2x\right) + C \qquad \dot{w}(0) = 0 \iff C = 0$$

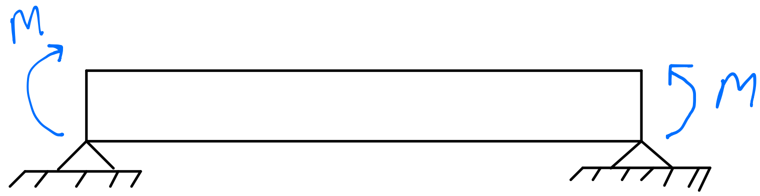
$$w(x) = \frac{-1}{2EI} q_0 \left(\frac{1}{60L}x^5 - \frac{1}{6}Lx^3 + \frac{2}{6}L^2x^2\right) + D \qquad w(0) = 0 \iff D = 0$$

Beräkna nu: $w(L)$

$$w(L) = \frac{-1}{2EI} q_0 \left(\frac{1-10+20}{60} L^4\right) = \boxed{\frac{-11}{120\,EI} q_0 L^4}$$

6.7

L = 1.25 m
b = 25 mm
h = 3 mm
E = 206 GPa



a) Bestäm mittpunktsböjningen om momentet är 0.85 Nm.

Använd elastiska linjens ekvation $w(0) = w(L) = 0$

$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b = -M$ (konstant) $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-1}{EI}M \iff \frac{dw}{dx} = -\frac{x}{EI}M + A$

$w(x) = -\frac{x^2}{2EI}M + Ax + B$ $w(0) = 0 \iff B = 0$

$w(L) = 0$ $-\frac{L^2}{2EI}M + AL = 0 \iff A = ML \cdot \frac{1}{2EI}$

$w(x) = -\frac{x^2}{2EI}M + ML \cdot \frac{1}{2EI} \cdot x$ absolutbeloppet $|w(x)|$ är störst i $\frac{L}{2}$

$w(\frac{L}{2}) = -\frac{L^2}{8EI}M + M\frac{L^2}{4EI}$ (1)

$I = \frac{bh^3}{12} = 5.625 \cdot 10^{-11}$

Insättning i (1) ger $w(\frac{L}{2}) = \frac{L^2}{4EI}M \cdot \frac{1}{2} = 0.014m$ alltså $\boxed{14mm}$

b) Bestäm mittpunktsböjningen om den maximala spänningen är 40 MPa.

Det gäller att: $\sigma_x = \frac{M_b}{I_y} z + \frac{N}{A}$ Vi har $N=0$

$|\sigma_x|_{max} = \frac{|M_b|}{I_y} |z|_{max}$ där $|z|_{max}$ är det längsta avståndet från medellinjen

Alltså $|z|_{max} = \frac{h}{2} = 1.5\,mm$ $|M_b| = M$

Vi har $|\sigma_x|_{max} = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} \iff M = |\sigma_x|_{max} \cdot I \cdot \frac{2}{h}$ (1) (konstant)

Elastiska linjens elevation ger $EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M \iff \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-1}{EI} M$

$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{EI} Mx + A \iff w(x) = -\frac{1}{2EI} Mx^2 + Ax + B$ $w(0)=0 \iff B=0$

$w(L)=0 \iff \frac{ML}{2EI} = A$ Alltså: $w(x) = \frac{M}{2EI}(Lx - x^2)$

Symmetri $w(0) = w(L) = 0$ medför att $|w|_{max}$ går att finna i $x = \frac{L}{2}$

$w(\frac{L}{2}) = \frac{M}{2EI}\left(\frac{2L^2}{4} - \frac{L^2}{4}\right) = \frac{M}{8EI} L^2$ (2) (1) ger $M = 1.5\,Nm$

Insättning i (2): $w(\frac{L}{2}) = |w|_{max} = 0.025\,m$ Alltså $\boxed{25\,mm}$

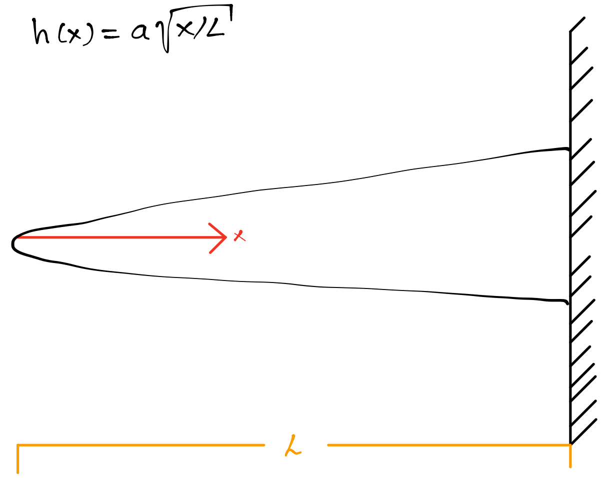
c) Vilken blir krökningsradien i det sista fallet?

Ur formelsamling: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \iff \boxed{\rho = 7.725\,m}$ Stort värde innebär små deformationer

6.8

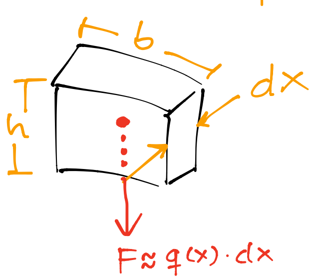
Konstant: bredd b
Variabel: höjd h(x)
Densitet: rho
Elasticitetsmodil: E
Beräkna nedböjning
vid x = 0.

$h(x) = a\sqrt{x/L}$



$w(L) = \dot{w}(L) = 0$

$T(0) = M_b(0) = 0$



Massan hos volymelementet är $\rho\, h(x) \cdot b\, dx$

kraften blir $g\rho\, h(x)\, b\, dx$

Sammantaget gäller $q(x)dx = -g\rho a\sqrt{x/L}\, b\, dx$

$q(x) = -g\rho a\sqrt{x/L}\, b$

$$\frac{dT}{dx} = -q = +g\rho a b\sqrt{\frac{x}{L}} \iff T = \frac{g\rho a b}{\sqrt{L}} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + A \qquad T(0)=0 \iff A=0$$

$$T = \underbrace{\frac{g\rho a b}{\sqrt{L}}}_{=\beta} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \qquad \frac{dM_b}{dx} = T \iff M_b(x) = \beta \cdot \frac{4}{15} x^{5/2} + B \qquad M_b(0)=0 \iff B=0$$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_b$$

OBS! I ej konstant: $I = \frac{bh^3}{12} \iff I = \frac{b \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^{3/2} \cdot a^3}{12}$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{-1}{EI}\beta\frac{4}{15}x^{5/2} = \underbrace{\frac{-1}{E}\beta\frac{48L^{3/2}}{15ba^3}}_{\lambda} \cdot x^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = \lambda x$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\lambda}{2}x^2 + C \qquad \dot{w}(L) = 0 \iff \frac{\lambda}{2}L^2 + C = 0 \iff C = -\frac{\lambda}{2}L^2$$

$$\dot{w}(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda}{2}L^2$$

$W(x) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - L^2 x\right) + D \quad W(L) = 0 \iff D = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{2}{3}L^3\right) = \frac{\lambda}{3}L^3$

$W(x) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - L^2 x\right) + \frac{\lambda}{3}L^3$

Vi är intresserade av $W(0)$ alltså $\frac{\lambda}{3}L^3$

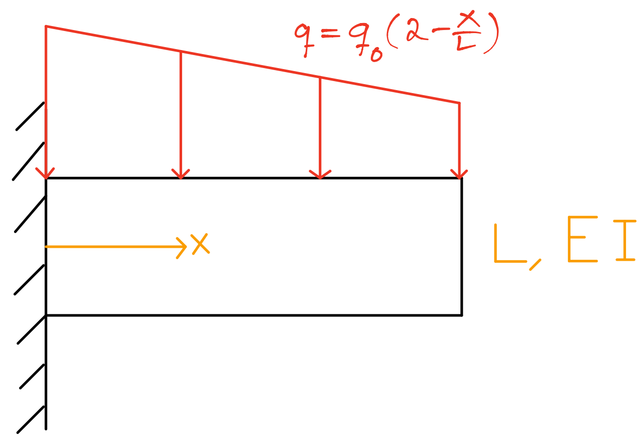
$\lambda = \frac{-1}{E}\beta\frac{48L^{3/2}}{15ba^3}$ o $\beta = \frac{g\rho ab}{\sqrt{L}}$ ger $\lambda = \frac{-1}{E}\cdot\frac{g\rho ab}{\sqrt{L}}\cdot\frac{48\sqrt{L}^3}{15ba^3} = \frac{-g\rho a\, 48L}{15E\, a^3}$

$\frac{\lambda}{3}L^3 = -\frac{g\rho a\cdot 16L^4}{15Ea^3} = -\frac{g\rho 16L^4}{15Ea^2}$

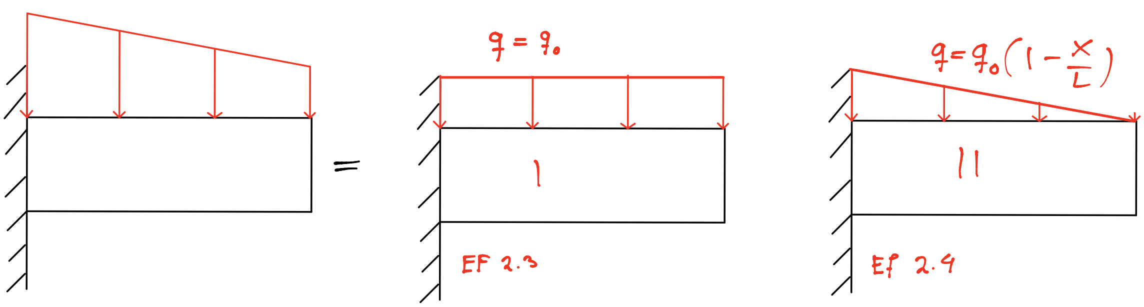
6.9

Bestäm nedböjningen i den fria änden

a) q = q_0(2-x/L)



Beräkna med hjälp av elementarfall:



I Enligt elementarfall 2.3: $\delta_I(\xi) = \frac{QL^3}{24EI}(\xi^4 - 4\xi + 3)$ ξ - räknas från änden.

$Q = q_0 \cdot L$ (Arean)

$$\delta_I(0) = \frac{q_0 L^4}{24EI} \cdot 3$$

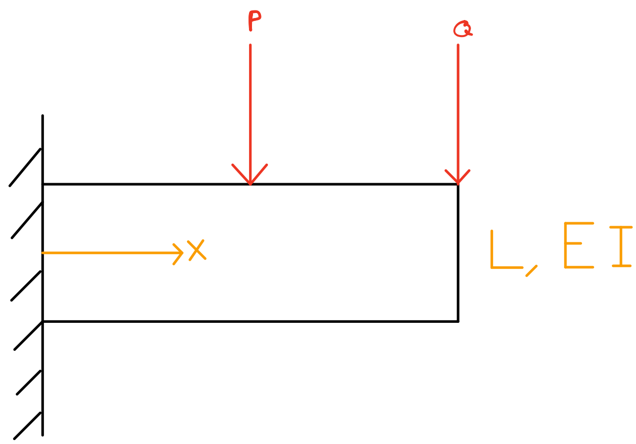
II Enligt elementarfall 2.4: $\delta_{II}(\xi) = \frac{QL^3}{60EI}(\xi^5 - 5\xi + 4)$

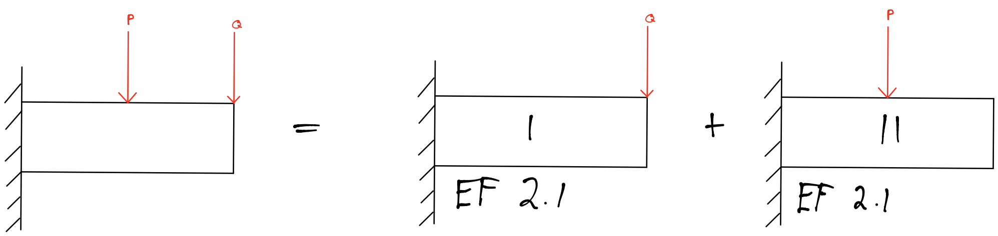
Q är triangelns area: $Q = q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{2}$

Insättning ger: $\delta_{II}(0) = q_0 L^4 \cdot \frac{1}{120EI} \cdot 4$

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} = \frac{q_0 L^4}{24EI} \cdot 3 + q_0 L^4 \cdot \frac{4}{120EI} = \frac{19}{120EI} q_0 L^4$$

b) Punktkraft P i mitten och Q i fria änden.





I: EF 2.1 : $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \xi = 0 \quad (\xi \le \alpha)$

$$\delta_I(0) = \frac{QL^3}{6EI}(-1+3) = 2\frac{QL^3}{6EI}$$

II: EF 2.1: $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \xi = 0 \quad (\xi \le \alpha)$

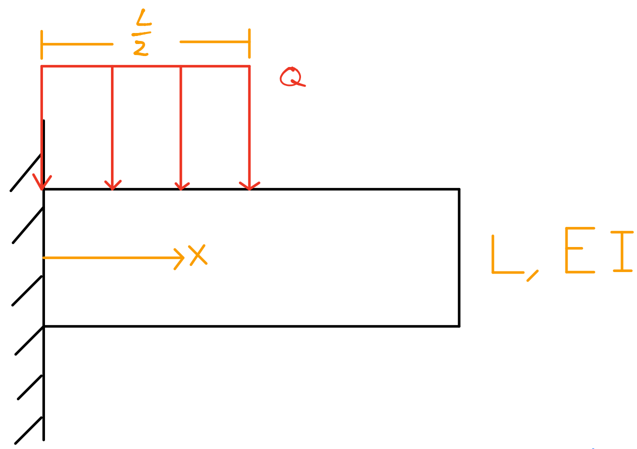
$$\delta_{II}(0) = \frac{PL^3}{6EI}\left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{48}\,\frac{PL^3}{EI}$$

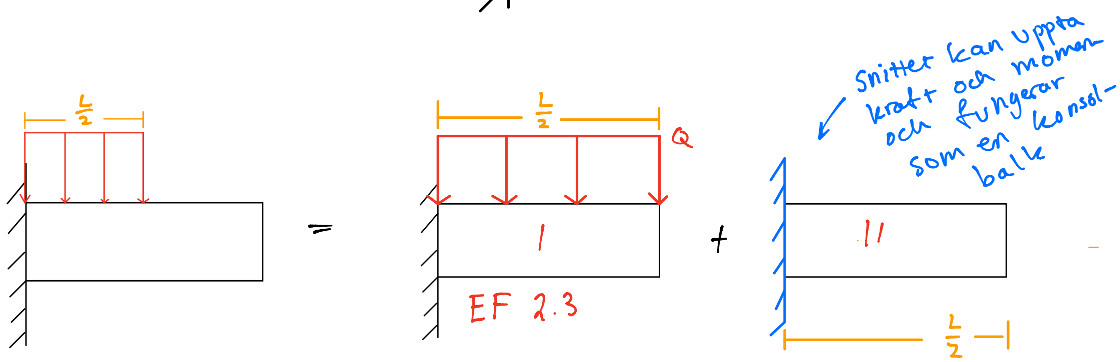
$$\delta = \delta_I + \delta_{II} = \frac{16}{48}\,\frac{QL^3}{48EI} + \frac{5}{48}\,\frac{PL^3}{EI} = \frac{16Q+5P}{48EI}\cdot L^3$$

c)

En jämnt fördelad last: Q över 0 < x < L/2

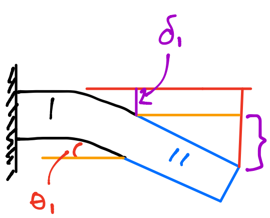
Beräkna





I: beräkna både δ_1 & θ_1 $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \xi = 0,\ L = \frac{1}{2}L$

$$\delta_1(0) = \frac{QL^3}{192EI}(0 - 4\cdot 0 + 3) = 3\frac{QL^3}{192EI} \qquad \theta_1(0) = \frac{QL^2}{24EI}\cdot 1$$

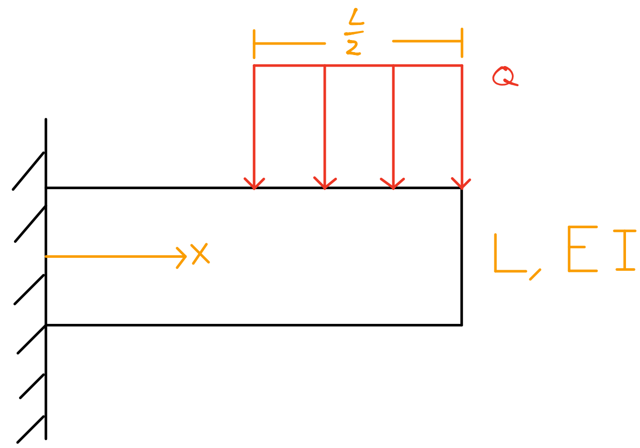


$$\frac{L}{2}\cdot \sin\theta_1 = [\text{små deformationer}] = \frac{L}{2}\theta_1$$

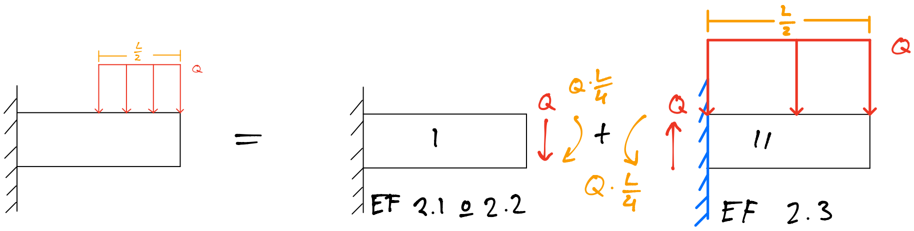
Sammantaget gäller: $\delta = \delta_1 + \frac{L}{2}\theta_1 = 3\frac{QL^3}{192EI} + \frac{QL^2}{24EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{(3+4)QL^3}{192} = \boxed{\frac{7}{192}QL^3}$

d) Q fördelad över L/2 < x < L

Bestäm nedböjningen med hjälp av elementarfall



Om vi snittar i $x = \frac{L}{2}$ kommer en kraft o ett moment verka där



I: Kan delas upp i två delar, en kraft o ett moment $\xi = \alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = \frac{1}{2}L$

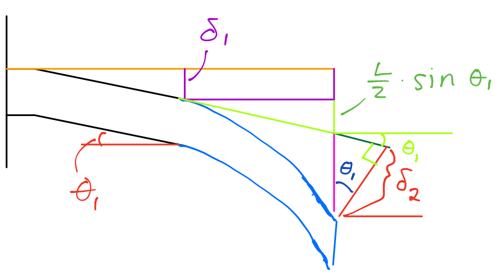
För kraften gäller: (2.1) $\delta_1^F(0) = \frac{QL^3}{48EI}(-1+3) = \frac{QL^3}{24EI}$

(2.2) $\delta_1^M(0) = \frac{Q\cdot L^3}{32EI}$

$$\left.\begin{matrix} \delta_1^F(0) = \frac{QL^3}{24EI} \\ \delta_1^M(0) = \frac{Q\cdot L^3}{32EI} \end{matrix}\right\} \delta_1 = \frac{(4+3)QL^3}{96} = \frac{7QL^3}{96}$$

$$\theta_1(0) = \theta_1^F(0) + \theta_1^M(0) = \frac{QL^2}{8EI} + \frac{QL^2}{8EI} = \frac{1}{4EI}QL^2$$

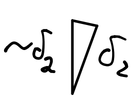
II: 2.3 ger $\delta_{II}(0) = \frac{QL^3}{192EI} \cdot 3 = \frac{QL^3}{64EI}$



Ur bilden framgår:

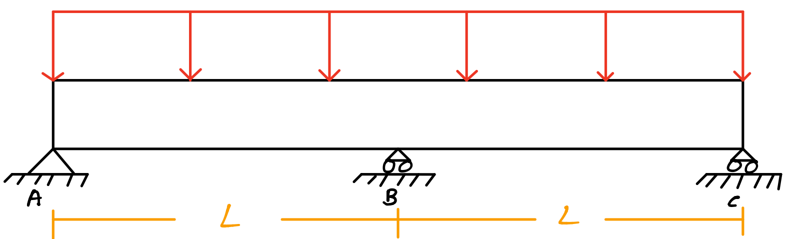
$$\delta_{tot} = \delta_1 + \frac{L}{2}\sin\theta_1 + \frac{\delta_2}{\cos\theta_1} \approx [\theta_1 << 1] \approx$$

$$\approx \delta_1 + \frac{L}{2}\theta_1 + \delta_2 = \boxed{\frac{41}{192}\frac{QL^3}{EI}}$$

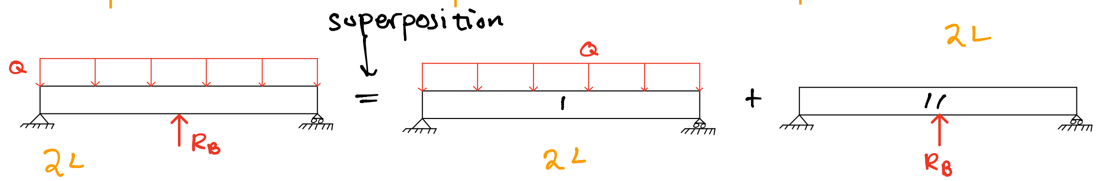


6.10

Balkens längd är 2L. Jämnt utbredd last Q. Beräkna böjmomentets extremvärde till storlek och läge.



Ersätt B med en vertikal kraft.



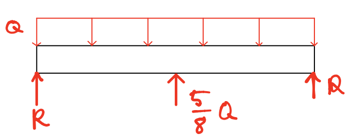
Beräkna mittpunktens förskjutningen: Summan måste vara 0.

I: EF 1.3: $\delta_1(\frac{1}{2}) = \frac{5Q(2L)^3}{384EI} = \frac{5QL^3}{48}$

II: EF 1.1 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ $P = -R_B$ $\delta(\alpha) = \delta(\frac{1}{2}) = -\frac{R_B(2L)^3}{3EI}(\frac{1}{2})^4 = -R_B\frac{L^3}{6EI}$

$\delta_1(\frac{1}{2}) + \delta_2(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{5QL^3}{48} - R_B \cdot \frac{L^3}{6EI} = 0 \Leftrightarrow R_B = 6 \cdot \frac{5Q}{48} = \frac{5}{8}Q$

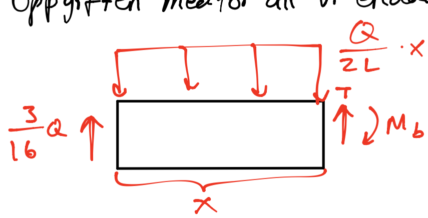
Nu kan vi beräkna de andra stödkrafterna



$(\uparrow)$: $2R + \frac{5}{8}Q - Q = 0 \Leftrightarrow R = \frac{3}{16}Q$

Symmetrin i uppgiften medför att vi endast behöver betrakta första längden L

$0 < x < L$



Alltså gäller:

$\curvearrowleft x$: $\frac{3Q}{16} \cdot x - \frac{Q}{2L} \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_b = 0 \iff M_b = \frac{Q}{4}\left(\frac{1}{L}x^2 - \frac{3}{4}x\right)$

Derivera: $\dot{M}_b(x) = \frac{Q}{4}\left(\frac{2}{L}x - \frac{3}{4}\right)$ $\quad \dot{M}_b(x) = 0 \iff x = 3\frac{L}{8}$

Eftersom M_b varierar linjärt o derivatan är monotont ökande har vi hittat en minpunkt.

$M_b(0) = 0$ $\qquad M_b(3\frac{L}{8}) = \frac{Q}{4}\left(\frac{9}{64}L - \frac{9}{32}L\right) = \frac{QL}{256}(9-18) = -\frac{9QL}{256}$

$M_b(L) = \frac{Q}{4}L \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}QL$

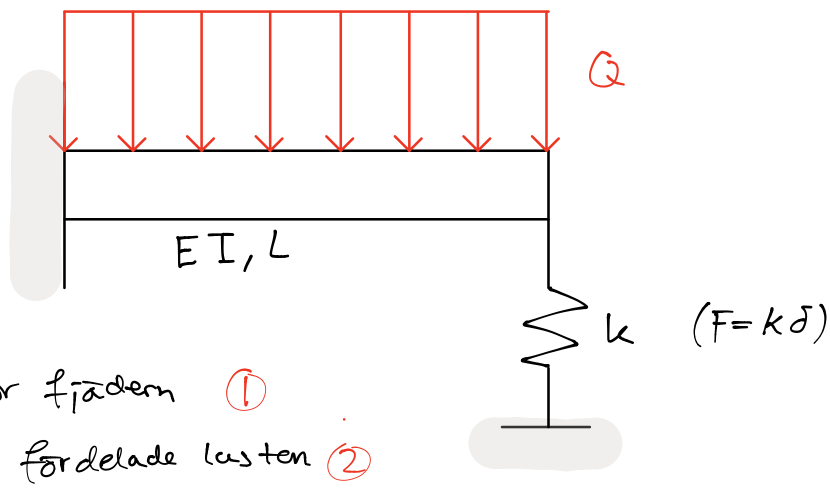
Alltså gäller: M_b antar min vid $\frac{3}{8}L$ från vardera kant.

Där är $M_b = -\frac{9QL}{256}$

M_b antar max på mitten: $M_{b\,max} = \frac{1}{16}QL$

6.11

Bestäm k så att balkens lutning är 0 vid det fjädrade stödet.



Använd EF 2.1 för fjädern (1)

& EF 2.3 för den fördelade lasten (2)

Summan av vinkeln θ ska vara 0.

(1): $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \xi = 0 \quad P = -k\delta$

$$\delta_1(0) = -\frac{k\delta L^3}{6EI}(-1+3) = -\frac{k\delta L^3}{3EI} \qquad \theta_1(0) = -\frac{k\delta L^2}{2EI}$$

(2) $\xi = 0$: $$\delta_{11}(0) = \frac{QL^3}{24EI}\cdot 3 = \frac{QL^3}{8EI} \qquad \theta_{11}(0) = \frac{QL^2}{6EI}$$

Det gäller att: $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ samt: $\theta_1 + \theta_2 = 0$ Ställ upp ekv-sys

$$\begin{cases} -\dfrac{k\delta L^2}{2EI} + \dfrac{QL^2}{6EI} = 0 \\ -\dfrac{k\delta L^3}{3EI} + \dfrac{QL^3}{8EI} = \delta \end{cases}$$

Två obekanta: δ & k: 2 ekv alltså lösbart

$$\begin{cases} k\delta = \dfrac{1}{3}Q \\ \delta\left(1 + \dfrac{kL^3}{3EI}\right) = \dfrac{QL^3}{8EI} \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{3k}Q \xrightarrow{[2]} \frac{1}{3k}Q\left(1 + \frac{kL^3}{3EI}\right) = \frac{QL^3}{8EI}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} + \frac{L^3}{3EI} = \frac{3L^3}{8EI} \qquad k = \left(\frac{(9-8)L^3}{24EI}\right)^{-1}$$

$$k = \frac{24EI}{L^3}$$

6.12

Denna uppgift beräknas två gånger på två olika sätt i boken: ex 6.14 och ex 6.15.