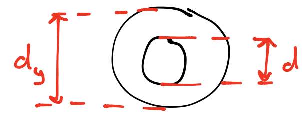
5.1

Ett tjockväggigt rör har innerdiametern 30 mm och ytterdiametern 50 mm. Hur stora är rörets vridmotstånd och vridstyvhet om G = 45 GPa



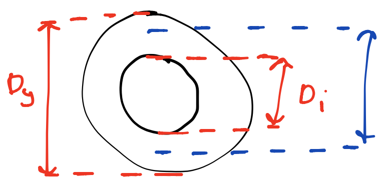
Det gäller att: (För tjockväggigt rör)

Vridmotstånd: $W_v = \frac{\pi(d_y^4 - d_i^4)}{16 d_y} \iff W_v = 2.14\cdot 10^{-5}\ m^3$

Vridstyvhet: $GK = G\cdot\frac{d_y}{2}\cdot W_v = 24\cdot 10^3\ Nm^2$

5.2

En röraxel har innerdiametern D_i och ytterdiameter D_y. D_i / D_y = alpha
Beräkna felet om röret approximeras som ett tunnväggigt rör.



$D_{medel} = (D_y + D_i)\frac{1}{2}$

För tunnväggigt: $K_1 = \frac{\pi D_m^3 (D_y - D_i)\frac{1}{2}}{4} = \frac{\pi (D_y+D_i)^3 \cdot \frac{1}{2^3}(D_y - D_i)\frac{1}{2}}{4} = \frac{\pi (D_y+D_i)^3 (D_y - D_i)}{64}$

För tjockväggigt: $K_2 =$

Felet:

$$\epsilon_\alpha = 1 - \frac{K_1}{K_2} = 1 - \frac{\frac{\pi (D_y+D_i)^3 (D_y - D_i)}{64}}{\frac{\pi (D_y^4 - D_i^4)}{32}} = 1 - \frac{32\pi (D_y+D_i)^3 (D_y - D_i)}{64\pi (D_y^4 - D_i^4)} = \left[D_y^4 - D_i^4 = (D_y^2 - D_i^2)(D_y^2 + D_i^2) = (D_y+D_i)(D_y-D_i)(D_y^2+D_i^2)\right] = 1 - \frac{1}{2}\frac{(D_y+D_i)^{\cancel{3}\,2}\cancel{(D_y-D_i)}}{\cancel{(D_y+D_i)}\cancel{(D_y-D_i)}(D_y^2+D_i^2)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{D_y^2 + 2D_yD_i + D_i^2}{D_y^2 + D_i^2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{D_yD_i}{D_y^2+D_i^2} =$$

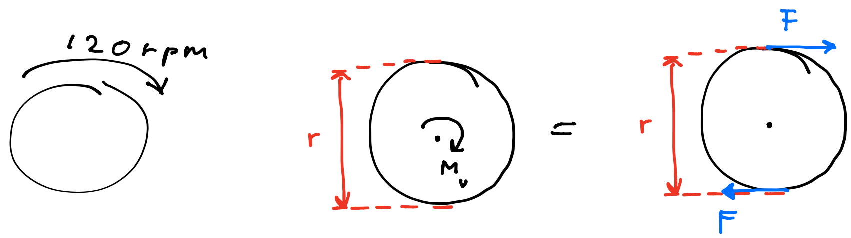
$$= \left[D_i = \alpha D_y\right] = \frac{1}{2} - \frac{\alpha D_y^2}{D_y^2(1+\alpha^2)} = \frac{1+\alpha^2 - 2\alpha}{2(1+\alpha^2)} = \frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha^2)}$$

Insättning av $\alpha = 0.7$ ger $\epsilon_{0.7} = \frac{(1-0.7)^2}{2(1+0.7^2)} \approx 0.03$ Alltså 3%

5.3

En massiv axel ska överföra effekten 370 kW vid varvtalet 120 rpm. Den maximalt tillåtna skjuvspänningen är 200 MPa.

a) hur stor måste axelns diameter vara?



$(\curvearrowright): \; M_v = 2\cdot\left(F\cdot\frac{r}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \; M_v = F\cdot r$

$P = F\cdot v = F\cdot r\omega$

(P = effekt)

Alltså får vi $M_v = \frac{P}{\omega}$ $\quad \omega$ = vinkelhastighet

$120 \text{ rpm} \rightarrow \omega = 120\cdot 2\pi/\text{min} = \frac{120\cdot 2\pi}{60}/\text{s} = 4\pi/\text{s}$

$$M_v = \frac{370\cdot 10^3}{4\pi}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{M_v}{\pi d^3}\cdot 16 \Leftrightarrow d = \sqrt[3]{\frac{M_v\cdot 16}{\tau_{max}\cdot\pi}} = 0.0908 \text{ m} = 90.8 \text{ mm}$$

b) Vilken viktbesparing kan man göra genom att ersätta axeln med en hålaxel vars innerdiametern är 0.6 x ytterdiametern

Antag att längden o densiteten är samma

För hål axel: Area = $R_y^2\cdot\pi - R_i^2\pi = \pi(R_y^2 - R_i^2) = \pi R_y^2(1-0.6^2) = \pi R_y^2\cdot 0.64$

För solid axel: Area: $R^2\pi$

$M_H = L\cdot A_H\cdot\rho = L\cdot\rho\pi R_y^2\, 0.36$

$M_s = L A_s \rho = L\rho R^2\pi$

Viktbesparing: $1 - \frac{M_H}{M_s} = 1 - \frac{L\rho\pi R_y^2\cdot 0.36}{L\rho R^2\pi} = 1 - \frac{R_y^2}{R^2}\, 0.64 \quad (1)$

På samma sätt som i a)

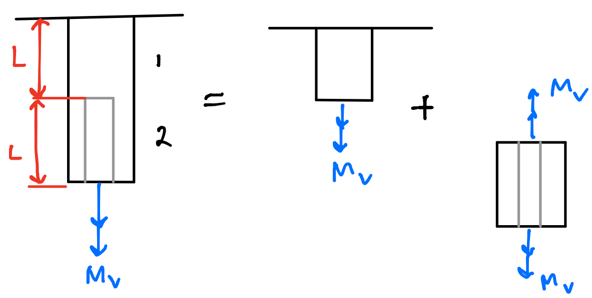
$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} \qquad W_v = \frac{\pi(D_y^4 - (0.6D_y)^4)}{16\,D_y} = \frac{\pi\,D_y^4(1-0.6^4)}{16\,D_y} = \pi\,\frac{D_y^3(0.8704)}{16}$$

$$D_y = \sqrt[3]{\frac{M_v}{\tau_{max}} \cdot \frac{16}{\pi \cdot 0.8704}} = 0.095$$

Insättnin i (1) ger $\quad 1 - \frac{M_H}{M_s} \approx 0.298$

5.4

Ytterdiametern är 3d och håldiametern är 2d. Beräkna vridmomentets storlek och den fria ändens vridning då maximala tvärkraften är 80 MPa, G = 80 GPa, d = 20 mm och L = 500 mm.



Vi har att $\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$

Genom att studera formeln för W_v ser vi att denna är som störst för den solida delen.

τ_{max} finns därför i område 2.

$$M_v = \tau_{max} \cdot W_v = \tau_{max} \cdot \pi\,\frac{((3d)^4 - (2d)^4)}{16\,(3d)} = 2.72 \text{ kNm}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_v L}{G K_1} + \frac{M_v L}{G K_2} = \frac{M_v L}{G}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) =$$

$$= \frac{M_v L}{G}\left(\frac{32}{\pi(3d)^4} + \frac{32}{\pi(3d)^4 - (2d)^4}\right) = \frac{M_v L}{G}\left(\frac{32 \cdot 65 + 32 \cdot 81}{\pi\, 81 \cdot 65\, d^4}\right) = 0.03 \text{ rad}$$

$0.03 \text{ rad} = 1.72°$

5.5

Ett stålrör (G = 80GPa) med ytterdiametern 50 mm belastas med ett vridande moment. Hur stor är maximala skjuvspänningen i röret då förvridningen uppgår till 1 grad per meter om röret är:

a) tunnväggigt

Vi har $\varphi = \frac{M_v L}{GK}$ (obs rad) $1° = 0.0175$ radianer Detta är per meter

$$M_v = \frac{\varphi G K}{L} = 0.0175 \cdot G \cdot K = 0.0175 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (50 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 859 \text{ Nm}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{859 \cdot 16}{\pi \cdot (50 \cdot 10^{-3})^3} = 35 \text{ MPa}$$

b) tjockväggigt

$$M_v = 0.0175 G K$$

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{0.0175 \cdot G \cdot \cancel{K}}{\frac{2\cancel{K}}{D_y}} = \frac{D_y \cdot 0.0175 G}{2} = 35 \text{ MPa}$$

$$W_v = \frac{2K}{D_y}$$

c)massivt

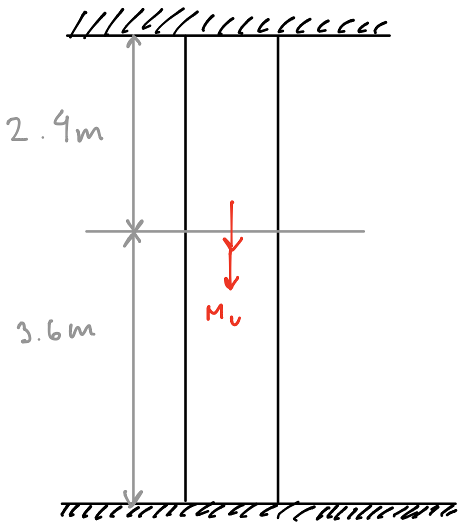
På samma sätt

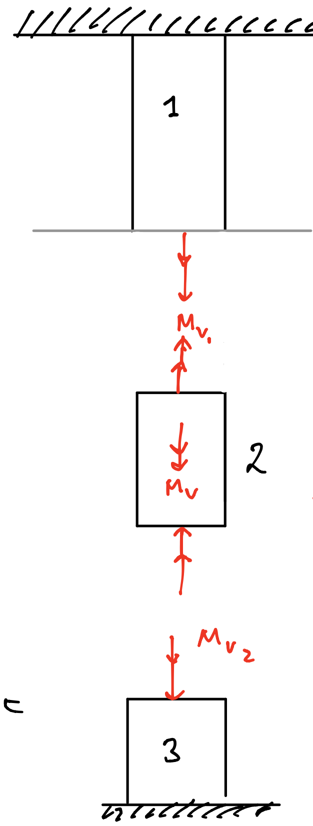
$$M_v = 0.0175 \cdot G K$$

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} = \frac{0.0175 G \cancel{K}}{2 \cancel{K} \cdot \frac{1}{D}} = \frac{D \cdot 0.0175 G}{2} = 35 \text{ MPa}$$

5.6

En massiv stålaxel (G = 82 GPa) med längden 6 m och diameter 40 mm är fast inspänd i bägge sina ändar. Ett vridande moment 1.25 kNm verkar på axeln på ett avstånd 2.4 m från ena änden. Ställ upp jämviktsekvationer, deformationsvillkor och samband mellan förvridning och vridmoment.





Notera att momentens riktning är olika mot ytan vid 1 o 3

Detta medför att

$\varphi_2 = -\varphi_1$

$M_v - M_{v_1} - M_{v_2} = 0 \quad (1)$

En gång statiskt obestämt

Deformationen då mittelementets längd är infinitesimalt litet måste vara lika

Vi har följande: $\varphi = \frac{M_v L}{GK}$ Alltså gäller att $-\varphi_1 = \frac{M_{v_1} \cdot 2.4}{GK} = \varphi_2 = \frac{M_{v_2} \cdot 3{,}6}{GK}$

Vi får alltså

a) bestäm reaktionsmomenten

$M_{v_1} = \frac{3.6}{2.4} M_{v_2}$ insättning i (1): $M_v = \left(1 + \frac{3.6}{2.4}\right) M_{v_2} \Leftrightarrow M_{v_2} = \underline{0.5 \text{ kNm}}$

Insättning av det beräknade värdet för M_{v_2}

$(1.25 - 0.5) \text{ kN} = M_{v_1} \Leftrightarrow M_{v_1} = \underline{0.75 \text{ kNm}}$

b) Hur stora är de maximala skjuvspännignarna i de två axeldelarna?

Vi har att $\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$

För område 1 gäller alltså:

$$\tau_{max1} = \frac{0.75\,kNm}{\pi \cdot (40 \cdot 10^{-3})^3} \cdot 16 \cdot \frac{1}{m^3} \approx \underline{59.7\,MPa} \qquad \tau_{max2} = \frac{0.5}{0.75}\tau_{max1} = \underline{39.8\,MPa}$$

c) Hur stor är förvridningen av den sektion där momentet angriper.

$$\varphi = \frac{M_{v1} \cdot 2.4}{G\,K} = \frac{0.75 \cdot 10^3 \cdot 2.4}{82 \cdot 10^9 \cdot \pi (40 \cdot 10^{-3})^4} \cdot 32 \approx 0.087 \text{ (radianer)} = \frac{0.087 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx \underline{5^\circ}$$