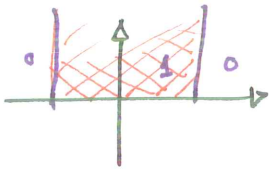
# KAPITEL 5

**5.1** Använd Poissons integralformel i halvplanet $y>0$ för att bestämma den harmoniska funktion som uppfyller

$$u(x,0)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

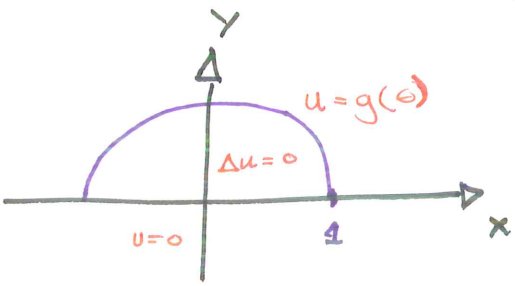



$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2}\,d\alpha=\left[\frac{1}{\pi}\left(-\arctan\left(\frac{x-\alpha}{y}\right)\right)\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)\right)}$$

**5.2** Ange lösningen på integralform

$\boxed{x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta}$




$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{i } \Omega\\ u=g(\theta) & \text{på } \delta\Omega\end{cases}$$

$$u(r,\theta)=\int_0^{\pi}g(\alpha)\left(P(r,\theta-\alpha)-P(r,\theta+\alpha)\right)d\alpha$$

där $P(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$ (se s. 157)

$\boxed{5.9}$ $\boxed{\text{Lös}}$

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(0,0,a)} & \text{i } \Omega : z>0 \\ u(x,y,0) = 0 \end{cases}, \quad a>0$$

$\tilde{\alpha} = (0,0,-a)$

Vi introducerar en speglad laddning i punkten $\tilde{\alpha}$ i form av $-\delta_{\tilde{\alpha}}$.

$(0,0,-\alpha)$

Detta ger:

$$-\Delta u = \delta_\alpha - \delta_{\tilde{\alpha}}$$

Mha fundamentallösningen får vi:

$$u(\bar{x}) = K(\bar{x}-\bar{\alpha}) - K(\bar{x}-\tilde{\alpha})$$

där $\cancel{K = \frac{1}{4\pi}\ln|x|}$ (se s. 158)

$$K = \frac{1}{4\pi|x|}$$

På reella axeln gäller: $|\bar{x}-\bar{\alpha}| = |\bar{x}-\tilde{\alpha}|$

$$\Rightarrow u(x) = K(\bar{x}-\bar{\alpha}) - K(\bar{x}-\tilde{\alpha}) = 0 \quad \text{då } x \in \partial\Omega$$

Eftersom $u$ också satisfierar diff.ekvationen så är $u$ problemets Greenfunktion,

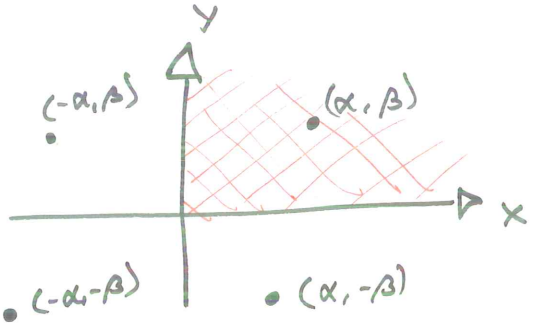
$$G(\bar{x},\bar{\alpha}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{\alpha}|} - \frac{1}{|\bar{x}-\tilde{\alpha}|}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right)}$$

$\boxed{5.10}$

a) Ange det problem som skall lösas vid bestämning av Greens funktion för Dirchlets problem i $\Omega: x>0, y>0$

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(\alpha,\beta)} & , x,y>0 \\ u(x,0)=0 & x>0 \\ u(0,y)=0 & y>0 \end{cases}$$




b) Bestäm Greenfunktionen

Eftersom $u(x,0)=u(0,y)=0$ så vill vi spegla udda med x- och y-axeln.

$$-\Delta u = \delta_{(\alpha,\beta)} - \delta_{(\alpha,-\beta)} + \delta_{(-\alpha,\beta)} - \delta_{(-\alpha,-\beta)}$$

Vi har enligt sats 5.1: $K(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\bar{x}|$

$$\Rightarrow \boxed{G(\bar{x},\bar{\alpha}) = -\frac{1}{2\pi}\Big(\ln|(x,y)-(\alpha,\beta)| - \ln|(x,y)-(-\alpha,\beta)| + \ln|(x,y)+(\alpha,\beta)| - \ln|(x,y)-(\alpha,-\beta)|\Big)}$$

c) $\boxed{\text{Beskriv mha Greenfunktionen lösn. till:}}$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y) & , \quad x, y > 0 \\ u(x,0) = g(x) & , \quad x > 0 \\ u(0,y) = 0 & , \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Enligt huvudsatsen (sats 5.4 s. 162-163):

$$u(\bar{x}) = \underbrace{\int_\Omega G(\bar{x},\bar{\alpha}) \cdot f(\bar{\alpha})\, d\bar{\alpha}}_{\text{poissonkärnan}} - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_\alpha}(\bar{x},\bar{\alpha})\, g(\bar{\alpha})\, ds_\alpha$$

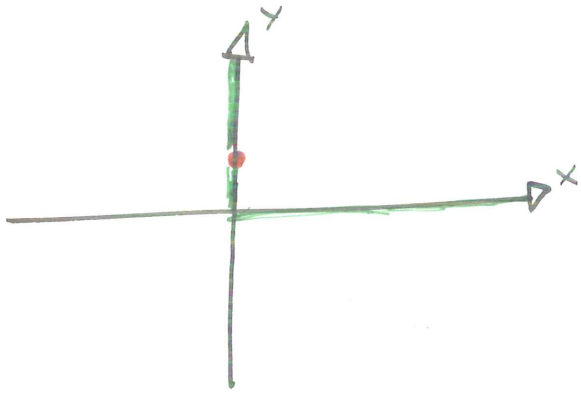
Randen $\partial\Omega$ består av två delar.

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \iint_\Omega G(x,y;\alpha,\beta) f(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left( \frac{y}{(x+\alpha)^2+y^2} - \frac{y}{(x-\alpha)^2+y^2} \right) g(\alpha)\, d\alpha}$$

## 5.11 Lös problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(1,1)}(x,y) & , \quad (x,y) > (0,0) \\ u(x,0) = 0 & , \quad x > 0 \\ u(0,y) = \delta_1(y) & , \quad y > 0 \end{cases}$$

Eftersom randvärdena är inhomogena så delar vi upp problemet i två delar.




$$A: \begin{cases} -\Delta u = \delta_{(1,1)}(x,y) \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,y) = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,y) = \delta_1(y) \end{cases}$$

- Problem A löses genom att spegla udda först i x-axeln och sedan i y-axeln.
- Problem B löses genom att spegla udda i x-axeln.

### Vi löser A

$$-\Delta u_A = \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} - \delta_{(-1,1)} + \delta_{(-1,-1)}$$

Fundamentallösning i $\mathbb{R}^2$

$$K(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln|\bar{x}|$$

$$\Leftrightarrow u_A = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|(x,y)-(1,1)| - \ln|(x,y)-(1,-1)| - \ln|(x,y)-(-1,1)| + \ln|(x,y)-(-1,-1)|\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{((x-1)^2+(y-1)^2)((x+1)^2+(y+1)^2)}{((x-1)^2+(y+1)^2)((x+1)^2+(y-1)^2)}\right)$$

# Vi löser B

Vi använder huvudsatsen där $f=0$ & $g=\delta_1(y)$.
Vi har $\bar{\alpha}=\bar{0}$ eftersom vi speglar kring y-axeln.

Med $-\frac{\delta G}{\delta \bar{n}_{\bar{\alpha}}}(\bar{x},\bar{\alpha})\Big|_{\alpha=0}$ = poissonkärnan får vi

$$u_B = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2} - \frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right)\delta_1\, d\alpha =$$

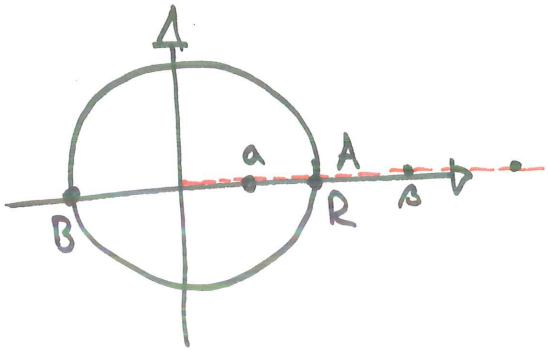
$$= \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2} - \frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right)}$$

$u$ ges av en superposition av $u_A$ & $u_B$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{svar: } u = u_A + u_B}$

5.13

a) Bestäm stationär tempfördelning




Vi bestämmer den konjugerande punkten till a. Alltså den punkt som alltid ligger C gånger avståndet till som a. (Detta är typ som att spegla). alla x på randen.

$$|x-a| = C\,|x-\beta|$$

$\beta$ ligger på den röda linjen. (pos. x-axeln.)

$$\boxed{|\beta| = \frac{r^2}{|a|}}$$

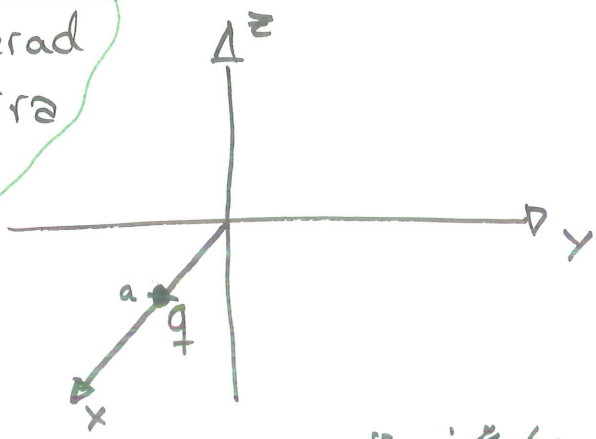
$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = \frac{q}{\lambda} \\ u = T_0 \text{ på } \delta\Omega \end{cases}$$

Homogenisering och fundamentallösningen ger:

$$\boxed{u(x,t) = T_0 - \frac{q}{\lambda}\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\ln\left((x-a)^2+(y-0)^2\right) - \ln\left(\left(x-\frac{r^2}{a}\right)^2+(y-0)^2\right) - 2\ln\frac{a}{r}\right)}$$

(Kan ha gett upp.)

$\boxed{5.20}$ yz-planet är en isolerad vägg, bestäm den stationära temperaturen omedelbart intill väggen.




$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\delta_{(a,0,0)}, & x>0 \\ u'_x(0,y,z) = 0 \end{cases}$$

q är i (a,0,0)

$\alpha = (a,0,0)$

Vi speglar jämt i yz-planet så vi får en $\tilde{\alpha} = (-a,0,0) = -\alpha$

$$-\Delta u = \frac{q}{\lambda}(\delta_\alpha + \delta_{\tilde{\alpha}})$$

Vi har fundamentallösningar i $\mathbb{R}^3$

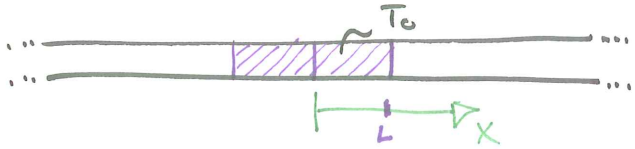
$$\boxed{K(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi|\bar{x}|}}$$

Vi har alltså:

$$\frac{q}{4\lambda\pi}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\alpha|} + \frac{1}{|\bar{x}-\tilde{\alpha}|}\right) = \frac{q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \dots = \boxed{\frac{q}{2\pi\lambda}(a^2+y^2+z^2)^{-1/2}}$$

**5.27** Bestäm tiden det tar innan temperaturen överallt är mindre än $T_0/2$.




$$\text{PDE}: \begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0 & , -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ \text{BV}: \ u(x,0) = T_0\left(\Theta(x+L) - \Theta(x-L)\right) & , -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Enligt anvisning använder vi formeln

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha,t)\, g(x-\alpha)\, d\alpha$$

där $G$ är Greenfunktionen för värmeledning och $g(x) = u(x,0)$.

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-L}^{L} T_0\, G(\alpha,t)\, d\alpha =$$

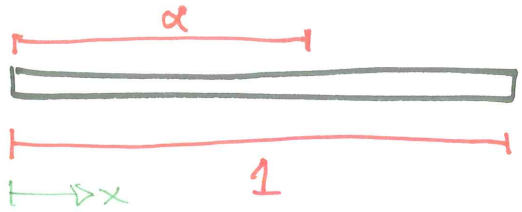
$$= \int_{x-L}^{x+L} \frac{T_0}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\alpha^2/4at}\, d\alpha = \boxed{\frac{T_0}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+L}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L}{\sqrt{4at}}\right)\right)}$$

Det kommer alltid att vara varmast i mitten, därför söker vi $t$ då $u(0,t) = \frac{T_0}{2}$.

$$\Rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{0+L}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{0-L}{\sqrt{4at}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{4at}}\right) = \frac{1}{2}}$$

**5.28** Lös problemet.




$$\begin{cases} \text{PDE:} & u_t' - u_{xx}'' = 0, \quad 0<x<1, \; t>0 \\ \text{RV:} & u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ \text{BV:} & u(x,0) = \delta(x-\alpha), \quad 0<\alpha<1 \end{cases}$$

Ansats: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sin(k\pi x)$

PDE: $\sum_{1}^{\infty} \left(u_k' - (k\pi)^2 u_k\right) \sin(k\pi x) = 0$

$\Rightarrow u_k(t) = C_k e^{(k\pi)^2 t}$

BV $\Rightarrow u(x,0) = \sum_{1}^{\infty} C_k \cdot \sin(k\pi x) = \delta(x-\alpha)$

Vi utvecklar $\delta(x-\alpha)$ i en sinusserie.

$\delta(x-\alpha) = \sum_{1}^{\infty} \beta_k \cdot \sin(k\pi x)$, $\beta_k = \frac{2}{1}\int_0^1 \delta(x-\alpha)\sin(k\pi x) = \boxed{2\sin(k\pi\alpha)}$

$C_k = \beta_k = 2\sin(k\pi\alpha)$

$\cancel{u(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi\alpha)\sin(k\pi x)}$

svar: $\boxed{u(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi\alpha) \cdot e^{(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x)}$