4. SYMMETRIER

4.1

a) $\int_{-5}^{5} x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-5}^{5} = \boxed{0}$ (UDDA)

b) $\int_{-5}^{5} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-5}^{5} = \frac{1}{3}(5^3+5^3) = \boxed{\frac{250}{3} \neq 0}$ (JÄMN)

c) $\int_{-5}^{5} x^3\,dx = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{-5}^{5} = \boxed{0}$ (UDDA)

4.2 Avgör om $\iint_S f(x)\,dxdy = 0$ eller $\neq 0$

Tänk bara efter vilka delar av figurerna som blir positiva och negativa.

4.3 Beräkna utan integration, V: $x^2+y^2+z^2=1$

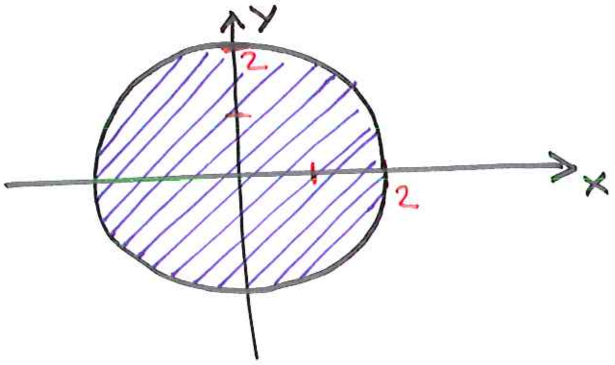
a) $\iiint_V x\,dxdydz = \boxed{0}$ (udda i x-led)

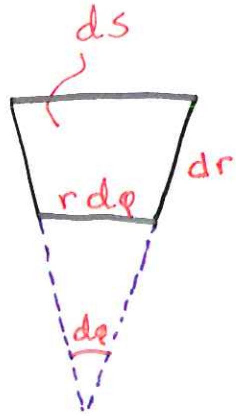
b) $\iiint_V (z+3)\,dxdydz = \iiint_V 3\,dxdydz = 3\cdot\underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\text{volymen}} = \boxed{4\pi}$

udda i z-led

$\boxed{4.4}$ $\boxed{\text{Hur stor är } \iint_S y^2 dS \text{ jämfört med } \iint_S r^2 dS?}$

S är cirkelytan $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$





$$\frac{\iint_S y^2 dS}{\iint_S r^2 dS} = \frac{\iint r^2 \sin^2\varphi \cdot \overbrace{r\,d\varphi\,dr}^{dS}}{\iint r^2 \cdot \underbrace{r\,d\varphi\,dr}_{dS}} =$$

$$= \frac{\cancel{\int r^3 dr} \cdot \int \sin^2\varphi\, d\varphi}{\cancel{\int r^3 dr} \cdot \underbrace{\int d\varphi}_{=2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{4.5}$ $\boxed{\text{Beräkna } \iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS}$

udda

$$\iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \frac{1}{R}\iint_S (\cancel{x^3} + 2y^2 + z^2)\,dS = \frac{1}{R}\iint_S (2y^2 + z^3)\,dS =$$

= / Vi vet att integralen över x^2 är lika med y^2. $\Rightarrow 2y^2 = x^2 + y^2$. / =

$$= \frac{1}{R}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = \frac{1}{R}\iint_S R^2\,dS =$$

$$= R\iint_S dS = R\cdot 4\pi R^2 = \boxed{4\pi R^3}$$

$\boxed{4.6}$

Området är symmetriskt i både x- och y-led. Därför är integralen över $2y^2$ = integralen över $x^2 + y^2$. (Precis som i förra uppgiften).