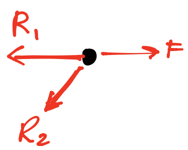
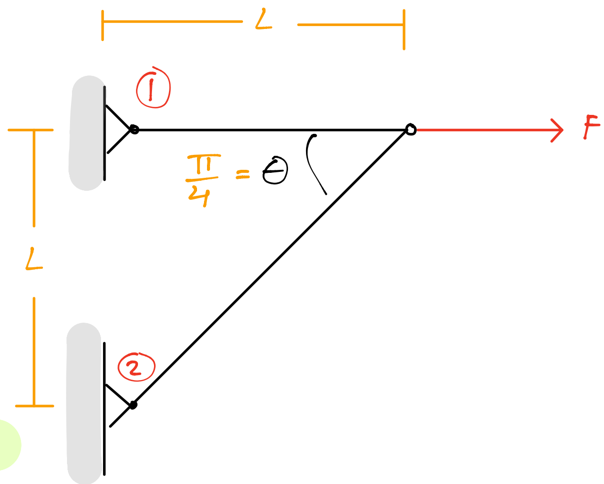
4.1 a)

Beräkna stångkrafter samt vertikal förskjutning



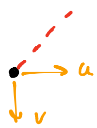


JKT ger:

$(\uparrow)$: $R_2 \sin\theta = 0 \iff R_2 = 0$

$(\rightarrow)$ $F - R_1 = 0 \iff \boxed{R_1 = F}$

Vi inför förskjutningens komponenter: u o v.



Det följer att 1 endast töjs i horisontell riktning: $u = \ell \cdot \epsilon_1$

Alltså $u = \ell \cdot \frac{\sigma_1}{E} = \ell \cdot \frac{F_1}{AE} = \frac{F\ell}{AE}$

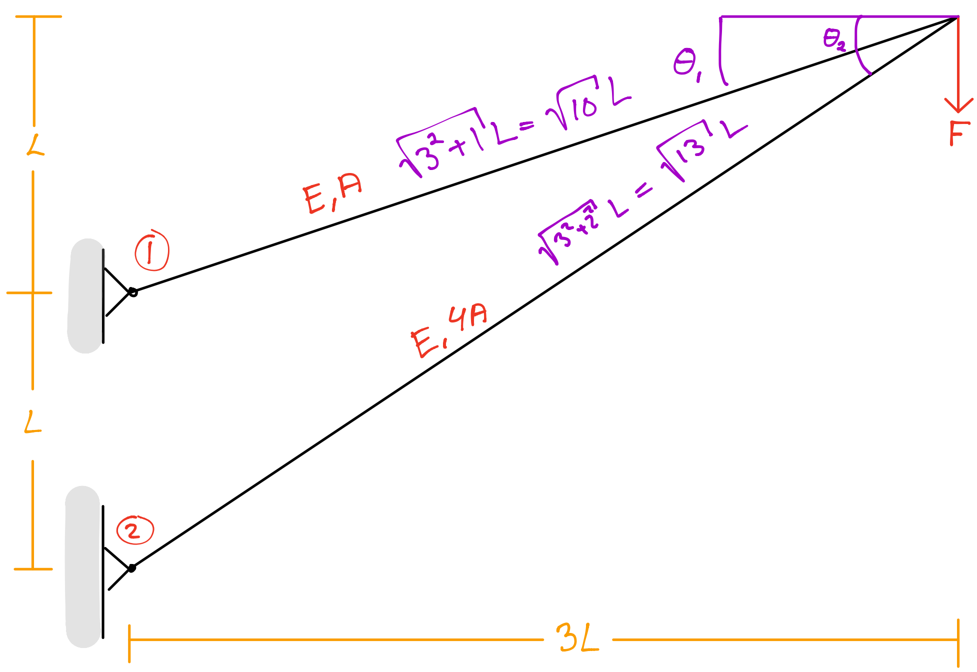
Vi intresserar oss emellertid endast av $\underline{v}$

Från stång 2 följer $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u - \frac{1}{\sqrt{2}} v$ u o v:s projektion i riktningen av 2

Men då denna stång är obelastad gäller: $\delta_2 = 0 \iff u = v$

Vi får att $\delta_v = v = u$ alltså $\boxed{v = \frac{F\ell}{AE}}$

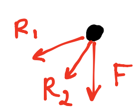
b)



Det gäller att: $\cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\quad \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad \sin\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$

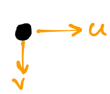
Studera kraftens angrepps punkt.



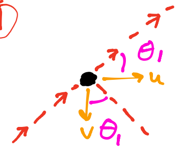
För JKT gäller: $(\uparrow)\ -R_1\sin\theta_1 - R_2\sin\theta_2 - F = 0 \iff -\frac{R_1}{\sqrt{10}} - \frac{R_2\cdot 2}{\sqrt{13}} = F \quad (1)$

$(\rightarrow)\ -R_1\cos\theta_1 - R_2\cos\theta_2 = 0 \iff R_1\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = -R_2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} \quad (2)$

Vi inför förskjutningen u o v.

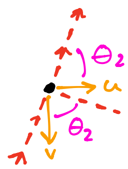


Eftersom vi endast tillåter töjning i stångernas längs-riktning måste vi studera u o v:s projektioner lång stångernas riktningar

1 

Från bilden får vi med hänsyn till riktning:

$$\delta_1 = u \cdot \cos\theta_1 - v\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta_1\right) = u\cos\theta_1 - v\sin\theta_1 \quad (3)$$

2 

$$\delta_2 = u\cos\theta_2 - v\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta_2\right) = u\cos\theta_2 - v\sin\theta_2 \quad (4)$$

Eftersom det gäller att $\delta = \epsilon \cdot L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{F}{AE} \cdot L$ (5)

Sammanslagning av (3)(4)&(5)

$$\begin{cases} u \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - v \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{R_1 \sqrt{10}\, \ell}{AE} \\ u \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - v \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{R_2 \sqrt{13}\, \ell}{(4A)E} \end{cases} \qquad \begin{cases} u \cdot 3 - v = \frac{10 R_1 \ell}{AE} \\ 3u - 2v = \frac{13 R_2 \ell}{4AE} \end{cases} \xrightarrow{[1]-[2]} v = \frac{\ell}{AE}\left(10R_1 - \frac{13}{4} R_2\right) \quad (6)$$

tre ekvationer, tre obekanta alltså lösbart

$$\begin{cases} v = \frac{\ell}{AE}\left(10 R_1 - \frac{13}{4} R_2\right) \quad (6) \\ F = -\frac{R_1}{\sqrt{10}} - \frac{2R_2}{\sqrt{13}} \quad (1) \\ R_1 \frac{3}{\sqrt{10}} = -R_2 \frac{3}{\sqrt{13}} \quad (2) \iff R_1 = -R_2 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Insättning i 1 ger

$$F = R_2 \frac{1}{\sqrt{13}} - 2R_2 \frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} R_2$$

Alltså: $\boxed{R_2 = -\sqrt{13}\, F}$ (Tryck)

Nu kan R_1 lösas ut:

$$R_1 = -R_2 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = -\left(-\sqrt{13}F\right)\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \boxed{\sqrt{10}F} \text{ (Drag)}$$

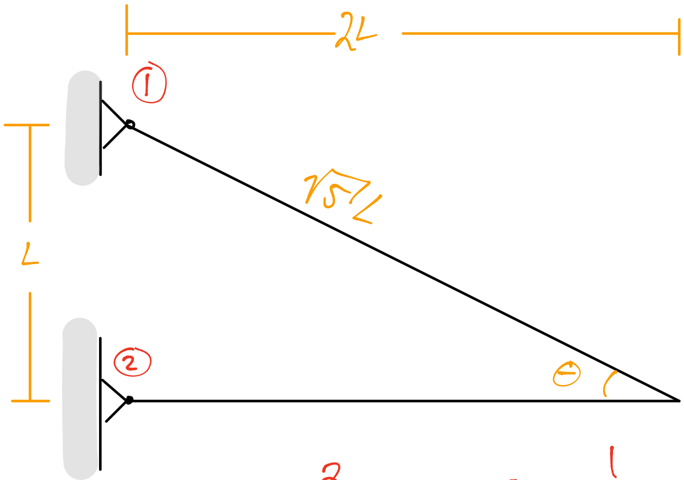
Eftersom vi endast är intresserade av v får vi:

$$v = \frac{\ell}{AE}\left(\sqrt{10}\, 10F + \frac{13}{4}\cdot\sqrt{13}F\right)$$

Alltså: $v = \frac{F\ell}{AE}\left(\sqrt{10}^3 + \frac{\sqrt{13}^3}{4}\right)$

4.2

Beräkna förskjutningen hos den yttre knutpunkten vid en homogen temperaturhöjning. Alla stänger är av samma material.



a)

Det gäller att $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^T$

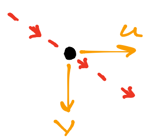
där $\epsilon^T = \alpha \Delta T$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Alltså:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T \Longleftrightarrow \epsilon = \frac{F}{AE} + \alpha \Delta T$$

För JKT krävs att alla krafter är 0



$$u = 2\ell \cdot \epsilon_2$$

$$u \cdot \cos\theta + v\sin\theta = \sqrt{5}\,\ell\,\epsilon_1$$

alltså $u \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + v\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,\ell\,\epsilon_1$

$$\epsilon_1 = \frac{F_1}{AE} + \alpha\Delta T = \alpha \Delta T \qquad (F_1 = 0)$$

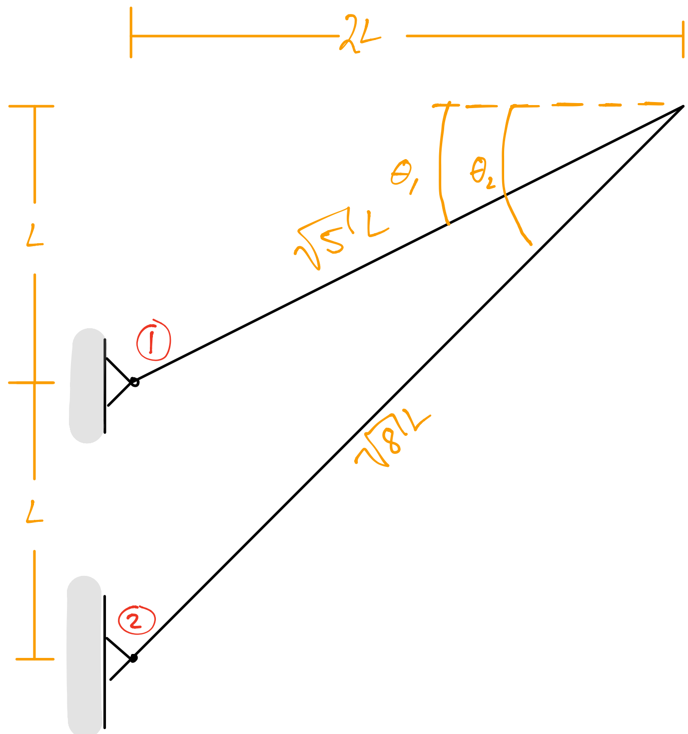
$$\epsilon_2 = \alpha \Delta T$$

$$u = 2\ell \cdot \alpha \Delta T$$

$$2\ell\alpha\Delta T \cdot 2 + v = 5\ell\alpha\Delta T \Longleftrightarrow v = \ell\alpha\Delta T$$

Svar: $2\ell\alpha\Delta T$ åt höger, $\ell\alpha\Delta T$ nedåt b)

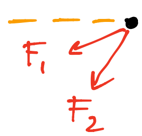
Samma som i a)



Vi har $\cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^T = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T = \frac{F}{AE} + \alpha\Delta T$$

Frilägg



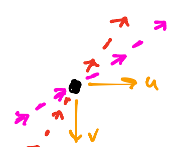
$(\uparrow)$ $-F_1\sin\theta_1 - F_2\sin\theta_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $F_1 = -F_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5} = -F_2\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(\rightarrow)$: $-F_1\cos\theta_1 - F_2\cos\theta_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $F_2\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \Leftrightarrow F_2 = 0$ $F_1 = 0$

Alla krafter är 0!



Studera förskjutningen:

$\delta_1 = u\cdot\cos\theta_1 - v\sin\theta_1 = u\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - v\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\delta_2 = u\cos\theta_2 - v\sin\theta_2 = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$$

Nu gäller att $\delta = \epsilon \cdot \ell = \ell\left(\frac{F}{EA} + \alpha\Delta T\right)$

Insättning ger:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 0 \\ \sqrt{5}\,\ell\left(\frac{F_1}{EA} + \alpha\Delta T\right) = \frac{2u-v}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{8}\,\ell\left(\frac{F_2}{EA} + \alpha\Delta T\right) = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 5\ell\alpha\Delta T = 2u - v \\ 4\ell\alpha\Delta T = u - v \end{array}$$

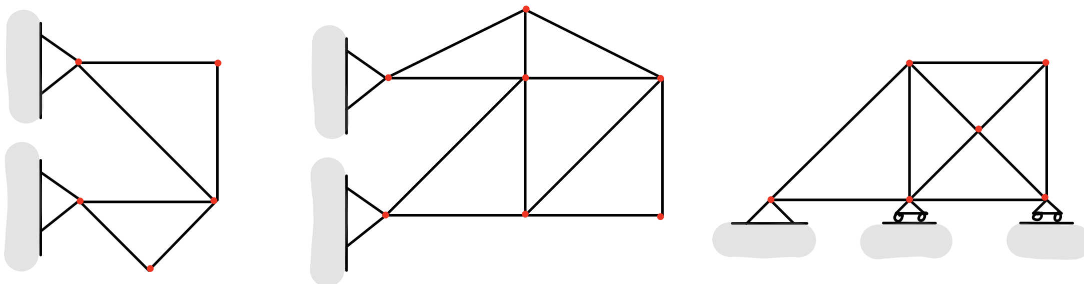
$[2] - 2[3] \longrightarrow \quad 5\ell\alpha\Delta T - 8\ell\alpha\Delta T = v \Longleftrightarrow v = -3\alpha\Delta T\ell$

$[3] \longrightarrow u = 4\ell\alpha\Delta T + v = \ell\alpha\Delta T$

Svar: Knutpunkten förskjuts upp $3\alpha\Delta T\ell$ o åt höger $\ell\alpha\Delta T$

4.3

a) b) c)



I varje knutpunkt kan 2 jämvikts ekvationer ställas upp, 1 vertikal & 1 horisontell. Varje stång kan endast bära tryck eller dragkrafter. Alltså gäller graden av statisk obestämdhet:

v – vertikal

h – horisontell

$-2 n_{knut.p} + n_{stång} + n^{v}_{fäste} + n^{h}_{fäste}$

I a får vi: $n_{knut.p} = 5$ $n_{stång} = 6$ $n^{v}_{fäste} = 2$ $n^{h}_{fäste} = 2$

$-2 \cdot 5 + 6 + 2 + 2 = 0$ Alltså statiskt bestämt

I b får vi: $n_{knut.p} = 7$ $n_{stång} = 11$ $n^{v}_{fäste} = 2$ $n^{h}_{fäste} = 2$

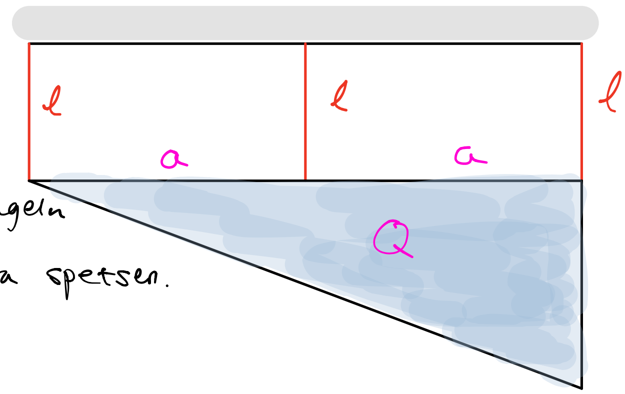
$-7 \cdot 2 + 11 + 2 + 2 = 1$ 1 gång statiskt obestämt

I c: $n_{knut.p} = 6$ $n_{stång} = 10$ $n^{v}_{fäste} = 3$ $n^{h}_{fäste} = 1$

$-12 + 10 + 3 + 1 = 2$ alltså 2 ggr st. obestämt

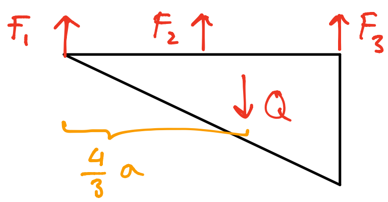
4.4

Beräkna linkrafterna om plåten antas vara stel.



Masscentrum i x-led för triangeln ligger $\frac{2}{3}\cdot(2a)$ från den vänstra spetsen.

FRILÄGG:

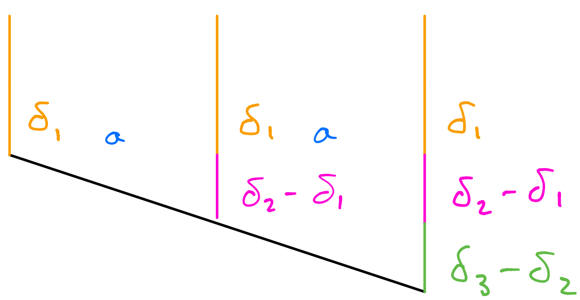


$(\uparrow)$: $F_1 + F_2 + F_3 = Q$

$(\overset{\curvearrowright}{1})$: $-F_2\cdot a - F_3\cdot(2a) + Q\cdot\frac{4}{3}a = 0$

(3 obekanta 2 ekv. 1 gång obestämt)

Vi har även ett deformationsvillkor



$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{a} = \frac{\delta_3 - \delta_2 + \delta_2 - \delta_1}{2a} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{2a}$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{2}(\delta_3 - \delta_1)$$

Men eftersom: $\delta = \epsilon\cdot\ell = \frac{\sigma}{E}\ell = \frac{F}{AE}\ell$ kan vi nu lösa ekv.

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + F_3 = Q \\ -F_2\cdot a - F_3\cdot(2a) + Q\cdot\frac{4}{3}a = 0 \\ \delta_2 - \delta_1 = \frac{1}{2}(\delta_3 - \delta_1) \iff \frac{\ell}{AE}(F_2 - F_1) = \frac{\ell}{2AE}(F_3 - F_1) \iff F_3 = 2F_2 - F_1 \end{cases}$$

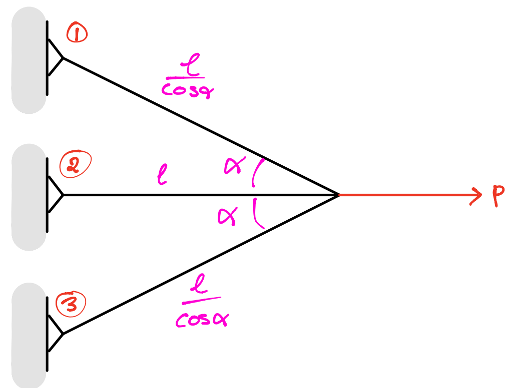
Alltså har vi: [1] o [3]: $F_1 + F_2 + 2F_2 - F_1 = Q \iff \boxed{F_2 = \frac{1}{3}Q}$

[2]: $Qa\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{2a} = F_3$: $\boxed{F_3 = \frac{Q}{2}}$

[1] ger nu: $F_1 = Q - \frac{Q}{2} - \frac{1}{3}Q \iff \boxed{F_1 = \frac{1}{6}Q}$

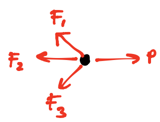
4.5

Den mittersta stången har längden l. E och A är även givna. Bestäm förskjutningen.



Baserat på symmetrin förväntar vi oss att den vertikala förskjutningen är 0.

Börja med friläggning:



$(\uparrow)$: $F_1 \sin\alpha - F_3 \sin\alpha = 0 \iff \boxed{F_1 = F_3}$

$(\rightarrow)$: $P - F_2 - 2F_1\cos\alpha = 0 \iff P = F_2 + 2F_1\cos\alpha$

1 gång statiskt obestämt:

Deformationsvillkor: Inför förskjutningar u & v

För 3: $\delta_3 = u\cdot\cos\alpha - v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = u\cos\alpha - v\sin\alpha$

För 1 (Symmetri:) $\delta_1 = u\cos\alpha + v\sin\alpha$

Men: $\delta = L\cdot\epsilon = L\cdot\frac{\sigma}{E} = L\cdot\frac{F}{AE}$: $\delta_1 = \frac{\ell}{\cos\alpha}\frac{F_1}{AE}$ $\delta_3 = \frac{\ell}{\cos\alpha}\frac{F_3}{AE} = \frac{\ell}{\cos\alpha}\frac{F_1}{AE}$

Alltså gäller att $\delta_1 = \delta_3$ eller: $u\cos\alpha - v\sin\alpha = u\cos\alpha + v\sin\alpha \iff v = 0$

Som förväntat!

$\delta_2 = u = \ell\frac{F_2}{AE}$ (Nu är systemet lösbart)

$$\begin{cases} F_1 = F_3 \\ P = F_2 + 2F_1\cos\alpha \\ \delta_1 = u\cos\alpha + v\sin\alpha = u\cos\alpha \\ \delta_2 = u = \ell\frac{F_2}{AE} \\ \delta_1 = \frac{\ell}{\cos\alpha}\frac{F_1}{AE} \end{cases}$$

med [5] får vi: $u = \frac{\ell}{\cos^2\alpha}\frac{F_1}{AE}$

Nu har vi två uttryck för u:

$$\ell\frac{F_2}{AE} = \frac{\ell}{\cos^2\alpha}\frac{F_1}{AE} \Leftrightarrow F_2 = \frac{F_1}{\cos^2\alpha}$$

Insättning i [2] ger: $P = F_1\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 2\cos\alpha\right) = F_1\left(\frac{1+2\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$

Vi får alltså: $\boxed{F_1 = P\frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} = F_3} \Leftrightarrow \boxed{F_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}}$

$$u = \ell\frac{F_2}{AE} \Leftrightarrow \boxed{u = \frac{P\ell}{AE(1+2\cos^3\alpha)}}$$