3. Linje- och Ytintegraler

3.1 Beräkna $\int_L \bar{F} \cdot d\bar{r}$

$\bar{F} = (x^2, 1, yz)$, $L: (t, 2t^2, 3t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

Riktnings-
Derivatan

$$\int_0^1 (t^2, 1, 6t^3) \cdot (1, 4t, 3)\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 + 4t + 18t^3 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{18}{4} t^4 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 + \frac{18}{4} = \boxed{\frac{41}{6}}$$

3.3 Beräkna linjeintegralen

$A = (2xyz, x^2z+1, x^2y)$

$L: (0,1,0) \longrightarrow (-1,10,-2)$

Du kan också kontrollera att vi har ett potentialfält och ta punkt 2 minus punkt 1

$$L: \begin{cases} x = -t \\ y = 1+9t \\ z = -2t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

Här har vi parametriserat linjen!

$$\int_0^1 \left(2\cdot\overset{x}{(-t)}\overset{y}{(1+9t)}\overset{z}{(-2t)},\ \overset{x^2}{t^2}\overset{z}{(-2t)},\ \overset{x^2}{t^2}\overset{y}{(1+9t)} \right)(-1,9,-2)\,dt =$$

$$= \int_0^1 -36t^3 - 2t^2\,dt = \left[-9t^4 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = -9 - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{29}{3}}$$

3.4 Beräkna integralen $\int_L F\,d\bar{r}$

$$\bar{F} = (yz, xz, xy) \qquad L: \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \\ z = c\sinh\frac{\varphi}{\pi} \end{cases} \qquad (a,0,0) \rightarrow \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}, c\sinh\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

$\varphi: 0 \rightarrow \frac{\pi\cdot 5}{4}$

Vi vet att φ går från 0 till $\frac{\pi\cdot 5}{4}$.

$$\int_0^{5\pi/4} \cancel{\left(bc\sin\varphi\sinh\left(\tfrac{\varphi}{\pi}\right), ac\cos\varphi\sinh\left(\tfrac{\varphi}{\pi}\right), a\cdot b\cdot\cos\varphi\sin\varphi\right)\cdot\left(-a\sin\varphi, b\cos\varphi, \tfrac{c}{\pi}\cos\tfrac{\varphi}{\pi}\right)d\varphi}$$

F är ett potentialfält eftersom $\nabla\phi = F$, $\phi = xyz + C$

Därför kan vi bara sätta in sista och första punkten och räkna differensen.

$\boxed{3.5}$ Beräkna flödet av $\bar{F}$ genom ytan S.

$\bar{F} = (1, xy, 0)$

$$S: \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \\ z = u^2 \end{cases}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

Normalen i punkten $(1,-1,0)$ går i positivt z-led.

Flödet ges av:

$$\int_S \bar{F}\, d\bar{a}$$

Detta är ett trick som är mycket viktigt att komma ihåg:

$d\bar{a}$ = ett areaelement.

$$\Rightarrow \boxed{d\bar{a} = \pm\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{s}}{\partial v}\right) du\,dv}$$

Vi kryssar två vektorer som är parallella med ~~ytan~~ ytelementet. ⇒ Normalen

$$\Leftrightarrow d\bar{a} = \pm((1,1,2u) \times (1,-1,0))\,du\,dv = \pm(2u, 2u, -2)\,du\,dv$$

Normalen i $u=0$: $\pm(2\cdot 0, 2\cdot 0, -2) = (0,0,1) \Rightarrow$

Vi måste byta tecken: $(-2u, -2u, 2)$

$$\int_S \bar{F}\, d\bar{a} = \int_S (1, x\cdot y, 0)(-2u, -2u, 2)\,du\,dv = \int_0^1\int_0^1 -2u(1+u^2-v^2)\,du\,dv = \boxed{-\frac{7}{6}}$$

3.6 Beräkna $\oiint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,ds$

S är sfären $x^2+y^2+z^2=2^2$

$\bar{F}=(x,y,z)$

$$\bar{n}=\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|}=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\oiint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,ds=\oiint_S (x,y,z)\cdot\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds=$$

$$=\oiint_S \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds=\oiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds=$$

$$=\oiint_S r\,ds=\oiint \cdot 2\,ds=2\cdot\underbrace{4\pi\cdot 2^2}_{\text{ytan på sfären ges av } 4\pi r^2}=\boxed{32\pi}$$

3.7 Beräkna flödet av vektorfältet genom sfärytan.

$A=(x^2,2y,z)\quad S: x^2+y^2+z^2=R^2$

Parametrisering av S: $\bar{r}=R(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)$

$$\oint_S \bar{A}\,d\bar{S}=\int_V \nabla\cdot\bar{A}\,dV=\int_V(2x+2+1)\,dV=\int_V(2r\sin u\cos v+3)\,dV=$$

$$=\oint_V(2r\sin(u)\cos(v)+3)\overbrace{r^2\sin u\,dr\,du\,dv}^{dV}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(2r^3\sin^2u\cos v+3r^2\sin u)\,dr\,du\,dv=$$

$$=\boxed{4\pi R^3}$$

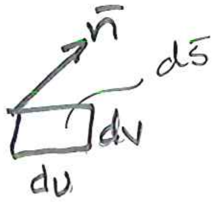
3.8 Beräkna flödet av vektorfältet

$A = (x^2 - y^2; (x+y)^2; (x-y)^2)$

$\bar{r} = (u+v, u-v, uv) \quad -1 \le u, v \le 1$

(3) $\bar{n} \cdot \bar{e}_z > 0$

Vi kan skriva $\bar{A}$ på följande form:



$\bar{A} = 4(uv, u^2, v^2)$

$$\bar{n} = \frac{d\bar{r}}{du} \times \frac{d\bar{r}}{dv} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = (u+v, v-u, -2)$$

negativ $\bar{n}$

(3): Byt tecken $\bar{n} = (-u-v, -v+u, 2)$

positiv! ü

Flödet: $\oint_S \bar{A}\, d\bar{S} = \oint_S \bar{A} \cdot n \, du\, dv = \boxed{\frac{32}{3}}$