KAPITEL 1

1.1

Ange differentialekvationen för ett diffusionsförlopp där det diffunderande materialet sönderfaller ~ koncentrationen

Den tredimensionella diffusionsekvationen i ett homogent medium vid konservering av massan ges av följande ekvation:

$$\frac{\partial q}{dt} - D\Delta q = k \qquad \text{(s. 10 i boken)}$$

Eftersom materialet sönderfaller ~ koncentrationen kan vi ersätta k med $-c \cdot q$.

$$\Rightarrow \boxed{\text{svar: } \frac{\delta q}{dt} - D\Delta q + cq = 0}$$

1.3

$$T = T_0 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Beräkna värmeströmtätheten. Hur är den riktad?

Fouriers lag (s. 11)

Värmeströmtätheten $j = -\lambda \cdot \text{grad}(T)$

Eftersom staven är tunn deriverar vi endast T i x-led.

$$\Rightarrow \boxed{j = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{2xT_0}{(1+x^2)^2}}$$

, Riktningen är bort från origo.

1.4

Ange en diffeku. för en tunn stav som ej är perfekt isolerad. Värmeförlust i x är ~ differensen mellan stavens temperatur i x och omgivningens temperatur.

T_0 T

Enligt sida 9:

$$\boxed{\frac{\delta T}{\delta t} - a \cdot \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = k \cdot (T - T_0)}$$

1.5 Ange d.e för transversella [redacted] vertikala svängningar i en lång horisontell sträng...

a) ...under inflytande av tyngdkraften

sida [redacted] 19, ekvation (21)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho_l} = -g}$$

$\left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]$ $[m/s^2]$ $\left[\frac{1}{kg}\right]$

b) ... om dessutom det omgivande mediet utövar ett motstånd ~ hastigheten.

Vi lägger till en term $\sim \frac{du}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -g}$$

1.6 Bestäm utbredningshastighet för vågor längs en sträng med densitet $\rho = 0.4$ kg/m och spänning $S = 0.9$ N

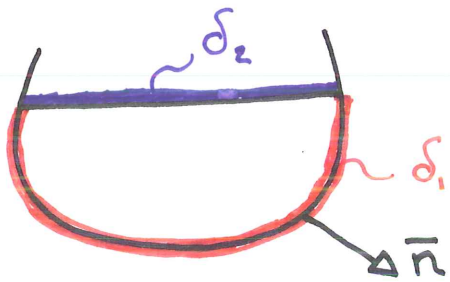
Vågekvationen i 1D (s. 19, (21))

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho_L}} = 1.5 \text{ m/s}$$

1.8 $u = u(x,y)$ är temp. i en platta Ω

a) Formulera ett värmeledningsproblem med homogena neumannvillkor.

$$\bar{n} = \text{grad}(q) = \frac{\delta q}{\delta \bar{n}} \text{ längs } \delta_1$$



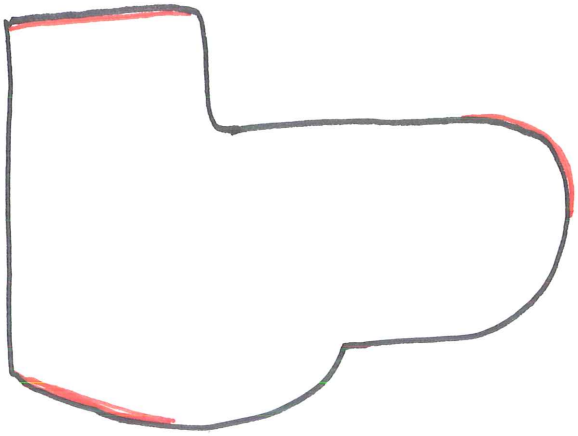
(sida 26)

b) Vilka fysikaliska betingelser ger upphov till Neumannvillkor?

De uppkommer av att randen är totalisolerad. $\bar{j} \cdot \bar{n} = -\lambda \frac{\delta u}{\delta \bar{n}}$

(se s. 25)

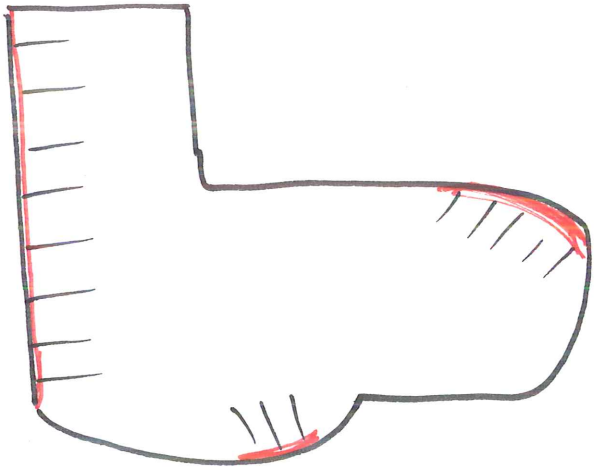
c)



På platserna angivna i rött är vektorfältets riktning ortogonal mot normalen

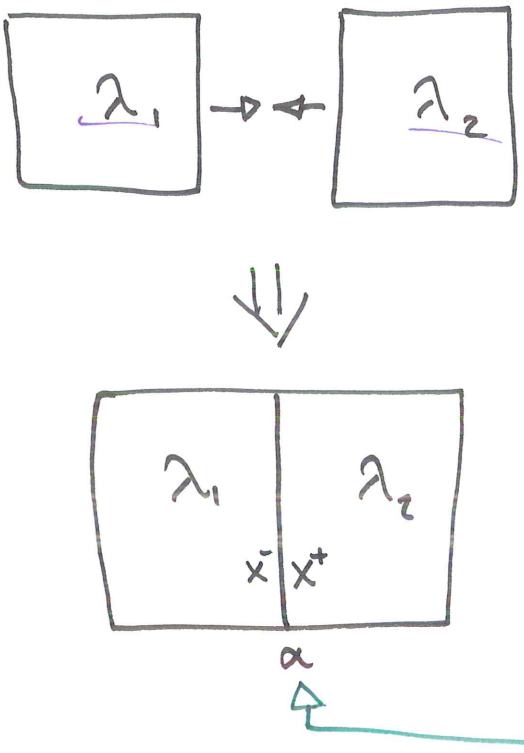
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0.$$

d)



samma resonemang, vektorfältet pekar vinkelrätt mot strecken. ~~gradienterna~~.

1.11 Ange villkor för begränsningsytan



α = värmeövergångskoefficienten.

$$-\lambda_1 \frac{\delta T}{\delta \bar{n}}(x^-,t) = -\lambda_2 \frac{\delta T}{\delta \bar{n}}(x^+,t) = \alpha\left(T(x^-,t) - T(x^+,t)\right)$$

1.12

Vi har en vägg med tjocklek L, som från början har temp. T_0. Vid $t=0$ ändras temperaturen på ena sidan till T_1.

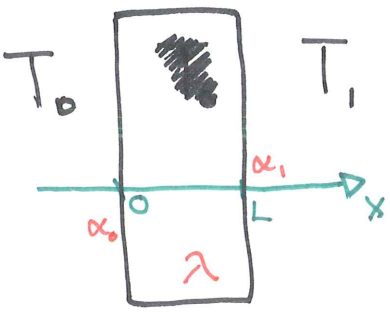
Ange diff.ekv. randvillkor & begynnelsevillkor

BV: $T(x,0) = T_0, \quad 0 < x < L$

RV: $\frac{\lambda}{\alpha_0} T'_x = T(0,t) - T_0$

$-\frac{\lambda}{\alpha_1} T'_x = T(L,t) - T_1$

& PDE: $T'_t - a T''_{xx} = 0$



Förstår ej denna riktigt.

1.13 Ange rimliga fysikaliska tolkningar.

a) $u(0,t)=0$

Temperaturen på ena sidan av en vägg hålls konstant (för alla t) och lika med 0.

b) $U_x'(0,t)=0$

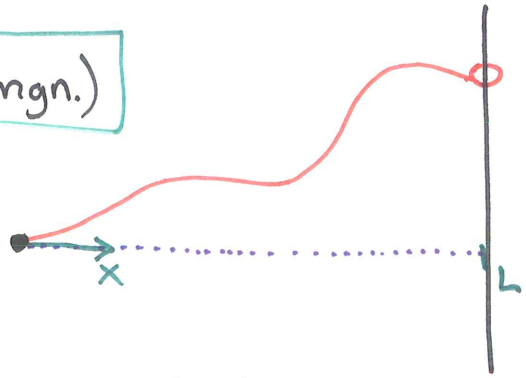
Temperaturändringen vid $x=0$ är noll.

$\Rightarrow$ Inget ut-/in-flöde av värme.

c) $$\begin{cases} U_x(0,t)=h\cdot u(0,t) \\ U_x(L,t)=-h\cdot u(L,t) \end{cases}$$

Temperaturförändringen vid $x=0$ och $x=L$ är proportionell mot u med proportionalitets-konstanten h resp. $-h$.

1.14 Ange randvillkor (små svängn.)

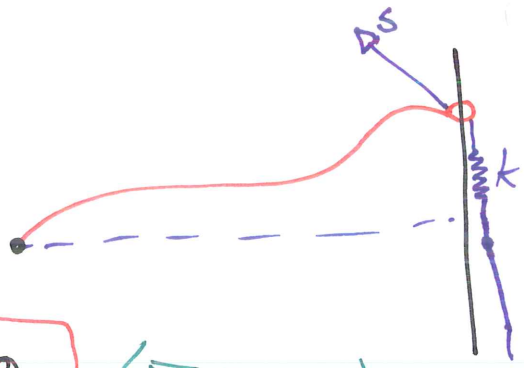


$$\boxed{\begin{aligned} U(0,t) &= 0 \\ U_x(L,t) &= 0 \end{aligned}}$$

(sitter fast i 0)

(Eftersom ringen endast kan röra sig lodrätt så måste strängens tangent vara horisontell vid $x = L$)

1.15 Formulera randvillkor



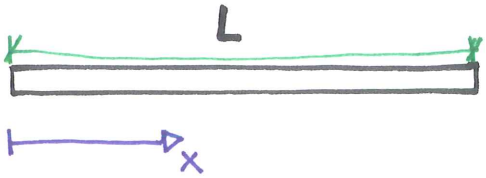
$$\boxed{\begin{aligned} &U(0,t) = 0 \\ &S\,U_x(L,t) + k \cdot U(L,t) = 0 \end{aligned}}$$

$(\sum F = 0)$

spännkraften i ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ vertikalled

Fjäderkraft

1.18 Formulera det matematiska problemet. Staven är fast i $x=0$.



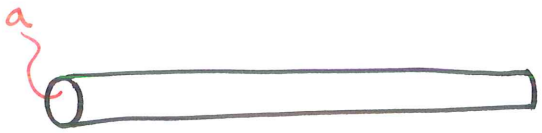
FS: $U''_{tt} - c^2 \cdot U''_{xx} = 0$, $c^2 = \frac{\alpha}{\rho_l}$, $F = \alpha \cdot \frac{\delta u}{dt}$

$U(0,t) = 0$, $t > 0$ (staven är fast i $x=0$)

$U(x,0) = \frac{Fx}{\alpha}$, $0 < x < L$ $\left(U(x,t) = \int \frac{F}{\alpha} dt \right)$

$U'_t(x,0) = \left(\frac{Fx}{\alpha}\right)'_t = 0$, $0 < x < L$ (

1.21



a) Bestäm värmeströmtätheten

Ekvation (28) på s.30 :

$$\boxed{j(r) = \frac{q}{2\pi r}}$$

b) På avståndet R_0 är $T=0$
Bestäm stationära temp.fördeln.

Fouriers lag

$\bar{j} = -\lambda \, \mathrm{grad}(T)$ (i r-led: $j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}$)

$\Rightarrow \frac{q}{2\pi r} = -\lambda \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow T = \frac{-q}{2\pi\lambda} \ln(r) + A$

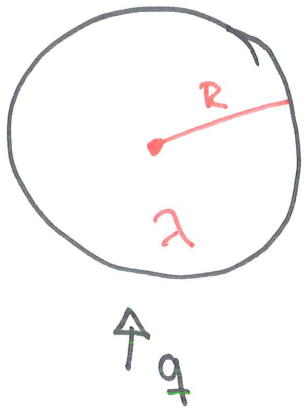
$T(R_0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-q}{2\pi\lambda} \ln(R_0) + A \Rightarrow A = \frac{q}{2\pi\lambda} \ln(R_0)$

$\Rightarrow \boxed{T(r) = \frac{q}{2\pi r} \ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}$

$\boxed{1.22}$

a) Visa att $u = u(r)$ uppfyller

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = \frac{q}{\lambda} \quad *$$



Eftersom vi har sfärisk symmetri kan $*$ skrivas

$$\Delta u = \frac{q}{\lambda}$$

b) Ange villkoret vid $r = R$ om vi har värmeövergångskoefficienten α och ungstemperaturen T_0.

$$\boxed{\underbrace{(u(R) - T_0)}_{\text{skillnaden i temp mellan } d\Omega \text{ och utanför.}} \cdot \alpha = -\lambda \underbrace{u'(R)}_{\text{förändring av temp. i } d\Omega.}} \quad \#$$

c) Bestäm stationära temperaturfördelningen.

$$-\frac{1}{r}(r \cdot u)'' = \frac{q}{\lambda} \iff r \cdot u = -\frac{q}{\lambda}\frac{r^3}{6} + Ar + B$$

$$\iff u(r) = -\frac{qr^2}{6\lambda} + A + \frac{B}{r}, \quad u'(r) = -\frac{qr}{3\lambda} - \frac{B}{r^2}$$

$$\# \text{ ger: } \left(-\frac{qR^2}{6\lambda} + A + \frac{B}{R} - T_0\right) \cdot \alpha = -\lambda\left(-\frac{qR}{3\lambda} - \frac{B}{R^2}\right)$$

$$\iff Ar + B = \frac{\lambda R}{\alpha}\left(\frac{qR}{3\lambda} + \frac{B}{R^2}\right) + T_0 r + \frac{qR^3}{6\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r) = T_0 + \frac{qR}{3\alpha} + \frac{q}{6\lambda}(R^2 - r^2), \text{ störst i mitten.}}$$