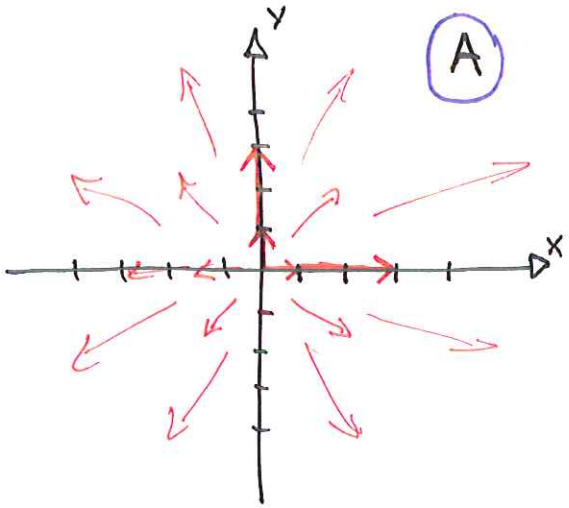
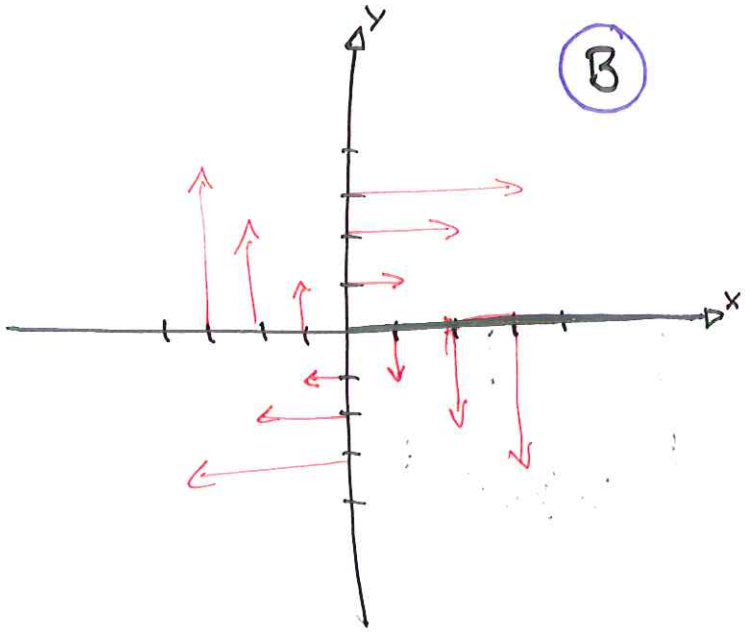
# 1. Inledande avsnitt

**1.1** Rita fälten A och B

$A = (x, y, 0)$

$B = (y, -x, 0)$




I punkten $(1,1,0)$ är fältlinjerna i

$A \Rightarrow (1,1,0)$ ↗ (längd $\sqrt{2}$)

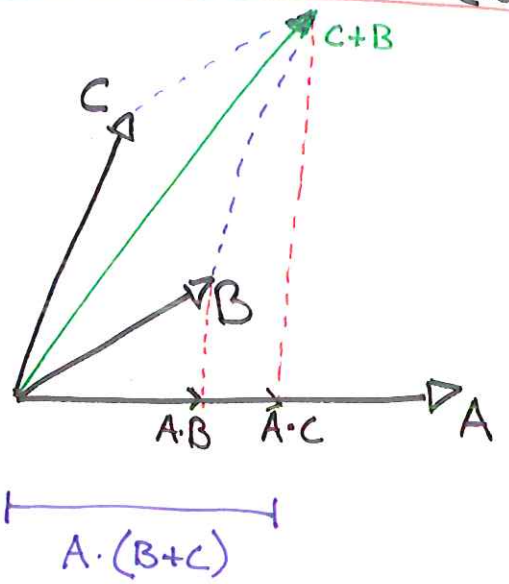
$B \Rightarrow (1,-1,0)$ ↘ (längd $\sqrt{2}$)

1.2 Visa att kryss- och skalärprodukt är distributivt

a)

## Skalärprodukt

Vi vill visa att $A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B+A\cdot C$

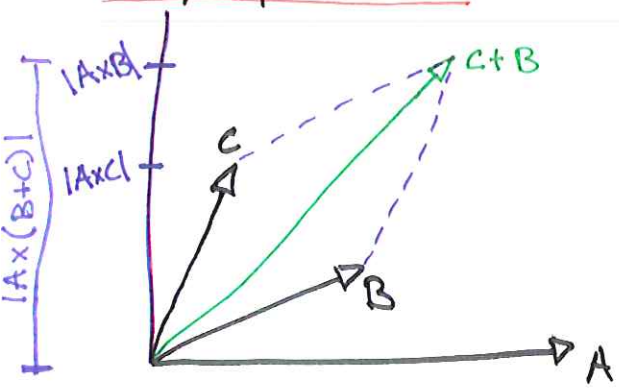



skalärprodukt kan tolkas som ortogonal projektion.
se figuren, längden för $A\cdot(B+C)$ är lika stor som $A\cdot B+A\cdot C$.

□

b)

## Kryssprodukt




Vid kryssprodukt får vi en vektor vinkelrät mot planet som spänns upp av vektorerna vi kryssar som har samma längd som arean mellan de kryssade vektorerna.

På y-axeln ser man längden av de tre kryssprodukterna.

$$\boxed{A\times(B+C)=A\times B+A\times C}$$

□

$\boxed{1.3}$ $\boxed{\text{Är vektorprodukt associativ?}}$

$$(A \times B) \times C \stackrel{?}{=} A \times (B \times C)$$

om A och B är parallella så kommer deras kryssprodukt att vara lika med nollvektorn.

$$A \parallel B \Rightarrow (A \times B) \times C = \bar{0} \times C = \bar{0}$$

Men om C inte är parallell med A eller B så är $B \times C \neq \bar{0}$

$$\Rightarrow A \times (B \times C) \neq \bar{0}$$

$\boxed{\text{Vektorprodukt är inte associativ}}$ $\square$

## 1.4 Bevisa CAB-BAC-regeln.

$$\boxed{A=(a_1,a_2,a_3),\ B=(b_1,b_2,b_3),\ C=(c_1,c_2,c_3)}$$

CAB-BAC-regeln

$$\underbrace{A\times(B\times C)}_{VL}=\underbrace{B(A\cdot C)-C(A\cdot B)}_{HL}$$

$$VL:\ A\times\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=A\times(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)=$$

$$=\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1\end{vmatrix}=$$

$$=(a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3))\cdot\bar{e}_x+$$

$$+(a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1))\cdot\bar{e}_y+$$

$$+(a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2))\cdot\bar{e}_z=$$

$$HL:\ B(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-C(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$\boxed{1.5}$

$$A\times(B\times C)+B\times(C\times A)+C\times(A\times B)=$$

$$=B(A\cdot C)-C(A\cdot B)+C(B\cdot A)-A(B\cdot C)+A(C\cdot B)-B(C\cdot A)=$$

$$=\begin{bmatrix} A\cdot B=B\cdot A \\ A\cdot C=C\cdot A \\ B\cdot C=C\cdot B \end{bmatrix}=\cancel{B(A\cdot C)}-\cancel{B(A\cdot C)}+\cancel{C(A\cdot B)}-\cancel{C(A\cdot B)}+\cancel{A(C\cdot B)}-\cancel{A(C\cdot B)}=$$

$$=0$$

---

$\boxed{1.6}$

$$\frac{dR(u)}{du}=A(u)\times R(u)$$

$\boxed{\text{Visa att } |R(u)| \text{ är konstant}}$.

$|R(u)|=\sqrt{R\cdot R}$, så om $R\cdot R$ är konstant så är $|R(u)|$ konstant. Vi deriverar...

$$(R\cdot R)'=R'\cdot R+R\cdot R'=2R\cdot R'=2R\cdot\underbrace{(A\times R)}_{\text{vektor}\perp R}=\underline{\underline{0}} \quad \#$$

---

**1.7** Beräkna gradienten för följande funktioner

a) $f = x^2 + y^3 + z^4$

$\nabla f = (2x, 3y^2, 4z^3)$

b) $f = x^2 y^3 z^4$

$\nabla f = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)$

c) $f = e^x \cdot \sin y \cdot \ln z$

$\nabla f = (e^x \sin y \ln z, e^x \cos y \ln z, e^x \sin y \cdot \frac{1}{z})$

---

**1.8** $T = x^2 + 2yz - z \qquad P: (1,1,2)$

a) I vilken riktning ska flugan flyga för att bli varm fortast?

$\nabla T = (2x, 2z, 2y - 1)$

Gradienten pekar åt riktningen där T ökar mest.

$\nabla T(1,1,2) = (2, 4, 1)$

Vi har satt in punkten P:s koordinater.

b) Hur snabbt ökar T om myggan flyger 3 l.e/s i riktningen (-2, 2, 1)?

3 le/s = 3 $\boxed{5\ °C/s}$

$$\nabla T(p)\cdot(-2,2,1) = (2,4,1)\cdot(-2,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \frac{5}{3}$$

~~Vi~~ myggan rör oss i 3 le/s $\Rightarrow$ T ökar $\frac{5}{3}\cdot 3 = \boxed{5\ °C/s}$

$f_v(P) = \nabla f(P)\cdot v_0 = (2,4,1)\cdot(-2,2,1)\cdot\frac{1}{3}$ $\frac{5}{3}$

---

$\boxed{1.9}$ Vilken vinkel bildar ytorna i punkten (0, 1, 0)

$$f: x^2+2xy+2zx-2x+2y+2z-2=0$$

$$\pi: x-y+z+1=0$$

$$\nabla f = (2x+2y+2z-2,\ 2x+2,\ 2x+2)$$

$$\nabla \pi = (1,-1,1)$$

$$\nabla f\Big|_{(0,1,0)} = (0,2,2)$$ (gradienten i (0, 1, 0))

Vi använder oss av definitionen av ~~vektorer~~ skalärprodukt för att beräkna vinkeln.

$$(1,-1,1)\cdot(0,2,2) = |(1,-1,1)|\cdot|(0,2,2)|\cdot\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 0-\cancel{2}+\cancel{2} = |(1,-1,1)|\cdot|(0,2,2)|\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{1.10}$ Ange en enkel parameterframställning för kurvan

$$\begin{cases} 4x - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

FRÅN TILL

$(0,0,0) \longrightarrow (1,2,5)$

$4x = y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + 4x = z}$

$$\boxed{\nabla f = (x, 2\sqrt{x}, x^2 + 4x)}$$

$\nabla f(P) = (1, 2, 9/2)$