Endimensionell analys

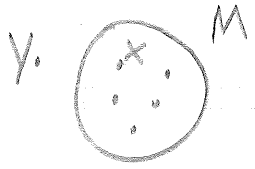
$f(z) = z + \frac{1}{z}$ (en variabel)

Tal, mängder och implikationer

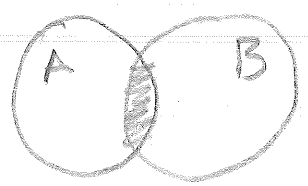
En mängd är en samling objekt (mängdens element)

ex. $x \in M$

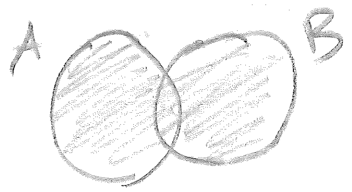
$y \notin M$



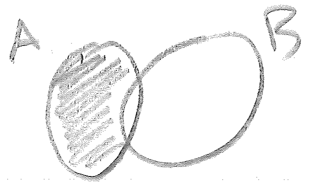
Tomma mängd $\emptyset$



$A \cap B$ Tillhör både A och B



$A \cup B$ Tillhör A eller/och B



$A \setminus B$ Tillhör A, men inte B

Naturliga tal

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ $+, \cdot$

Heltal

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ $+, \cdot, -$

Bråktal

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{Z}$ och $b \neq 0\}$

Reella tal

$\mathbb{R}$ mgd av reella tal

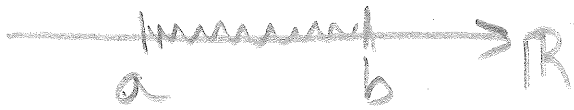
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

$\pi \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

$x > y \quad y > x \quad x = y$



$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ innehåller endpkt "slutet"

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$ "öppet"

$[a,b[$, $]a,b]$ halvöppet

∞ oändligheten

$]0,\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$

$]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$

Påstående < sant / falskt

ex. påstående A: "det regnar"

påstående B: "vägarna är våta"

Om det regnar, vägarna blir våta

$A \Rightarrow B$ "A medför B" el implicerar

$B \Rightarrow A$?

Om vägarna är våta, så regnar det

Nej! $B \not\Rightarrow A$

Om $A \Rightarrow B$ och $B \Rightarrow A$ så sägs A och B vara ekvivalenta

$A \Leftrightarrow B$

ex A: $x > 2$
B: $x = 4$
C: $-2x < -4$
D: $2x \cdot 2 = 6$

$$\begin{array}{ccc} A & \Leftrightarrow & C \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ B & \Leftrightarrow & D \end{array}$$

"Om det regnar, så blir vägarna våta"
samma som
"Om vägarna inte är våta, så regnar det inte"

Påstående: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bevis: (Motsägelsebevis)
Antag att det finns heltal a, b så att $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
Antag också att a och b inte har några gemensamma faktorer. $\left(\frac{1}{3} = \frac{4}{12}\right)$
Så a och b kan inte båda vara jämna tal.

Eftersom $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ är $2 = \frac{a^2}{b^2}$ eller $2b^2 = a^2$
Så a^2 är ett jämnt tal och således är a också ett jämnt tal.

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Vi kan skriva $a = 2k$ där k är ett heltal.
Nu har vi $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$$2b^2 = 4k^2$$
$$b^2 = 2k^2$$

Så b^2 är ett jämnt tal, alltså är b ett jämnt tal.

Antagandet är falskt! $\square$ q.e.d

Hur kan man tänka på skillnaden mellan $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$?

Varje reelt tal x kan skrivas på decimalform

$x = a_0 a_1 a_2 a_3$ $\quad a_0 \in \mathbb{Z}$

$a_1, a_2 \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Om decimalutvecklingen är ändlig, så är x rationellt

Är —||— oändlig men periodisk (från ett viss steg), då är x också rationellt.

Annars är x irrationellt ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)