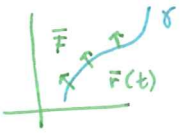
$$\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$\boxed{\text{Arbete} = \text{kraft} \cdot \text{sträcka}}$

$$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$



$$= \boxed{\int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} \right) dt}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $I = \int_\gamma y\,dx - x\,dy$, γ: pos orienterade enhetscirkeln

Parametrisering:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t = 0 \to 2\pi$$

$$\begin{cases} y'(t) = \cos t \\ x'(t) = -\sin t \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\sin t(-\sin t) - \cos t \cos t \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\left(+ \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} \right) dt = -2\pi$$

Greens formel

$\boxed{\text{Sats 9.1}}$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

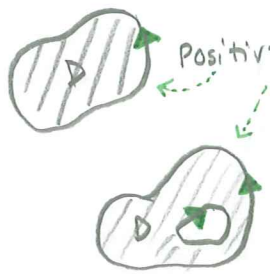
Knyter samman en dubbelintegral med en enkelintegral över dess rand.

Jämför insättningsformeln $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ som knyter en enkelintegral till värden i ändpunkterna.

För område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan vi tolka rande ∂D som "en kurva" vi ger nu denna en "riktning"

∂D positivt orienterad om vi har D på vänster sida när vi springer på ∂D

Ex:



Positivt orienterad

Trots att pilarna gå åt olika håll.

Samma $\boxed{\text{exempel}}$:

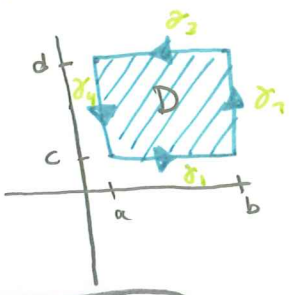
$$I = \int_\gamma y\,dx - x\,dy \;, \qquad \gamma:$$

Med Green: $(P, Q) = (y, -x)$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{dy} = -1-1 = -2$

$$I = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (-2)\,dx\,dy = -2\iint_D \underbrace{1\,dx\,dy}_{\text{arean}} = -2\pi$$

Svårt att få en intuitiv bild av detta, så vi bevis i "enklaste fallet"



- $\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases}$ $t: a \to b$ • $\gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}$ $t: c \to d$
- $\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases}$ $t: b \to a$ • $\gamma_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}$ $t: d \to c$

$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P(t,c)\cdot 1 + Q(t,c)\cdot 0)\,dt + \int_c^d (P(b,t)\cdot 0 + Q(b,t)\cdot 1)\,dt$$

$$+ \int_b^a (P(t,d)\cdot 1 + Q(t,d)\,0)\,dt + \int_d^c (P(a,t)\cdot 0 + Q(a,t)\cdot 1)\,dt$$

$$= \int_a^b P(t,c) - P(t,d)\,dt + \int_c^d Q(b,t) - Q(a,t)\,dt$$

Dubbelintegralen måste bli samma sak!

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{dQ}{dx}\,dx\right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{dP}{\partial y}\,dy\right) dx =$$

$$\int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]_a^b\,dy - \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_c^d\,dx = \int_c^d Q(b,y) - Q(a,y)\,dy - \int_a^b P(x,d) - P(x,c)\,dx$$

$$= \int_c^d (Q(b,t) - Q(a,t)\,dt + \int_a^b P(t,c) - P(t,d)\,dt$$

SAMMA! :)

$\boxed{\text{Ex}}$ $I = \int_\gamma (1 + xy)\,dx - x^2\,dy$ γ:

~~B~~ istället för att beräkna kurvintegralen av "3 γ-bitar" använder vi Green:

$$(P, Q) = (1 + xy, -x^2)$$

$$D: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}}\ E$$

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D -3x\,dx\,dy = -3\iint_E r\cos\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= -3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \int_0^1 r^2 = -3\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -3(1-0)\left(\frac{1}{3} - 0\right) = -1$$

För att använda Green måste vi ha en sluten kurva. Annars kan vi fixa det.

$\boxed{\text{Ex}}$ $I = \int_\gamma (1 + xy)\,dx - x^2\,dy$ γ: 

från $(1,0) \to (0,1)$

ej sluten men vi kan komplettera med γ_1 och γ_2

$$\int_\gamma \underbrace{P\,dx + Q\,dy}_{\text{söks}} + \underbrace{\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy}_{\text{beräknas}}$$

$$= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy}_{-1 \text{ enligt ovan}}$$

$\gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $t: 1 \to 0$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^0 (1 + 0 \cdot t)\,0 - 0^2 \cdot 1\,dt = 0$$

$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t: 0 \to 1$

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 (1 + t \cdot 0)\,1 - t^2 \cdot 0\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$$

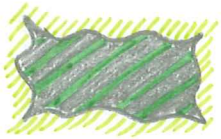
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D - \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = -1 - 0 - 1 = -2$$

Kolla $\int_{\partial D} 0\,dx + x\,dy$ $\quad (P,Q) = (0,x)$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

Green: $\int_{\partial D} x\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy =$ <u>arean</u> av D

P.S.S.

$$\int_{\partial D} -y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \text{arean av } D$$



$\boxed{\text{Ex}}$

Arean av ellipsskivan D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

Parametrisering av randen: $\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

$t: 0 \to 2\pi$

arean: $\int_{\partial D} x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = ab(\pi + 0 - 0) = \pi ab$$

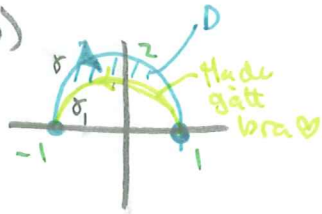
halvaxlarna är a och b att jämföra med πr^2

$\boxed{\text{Ett viktigt vektorfält} \quad (P,Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)}$

$\boxed{\text{Ex}}$

$I = P\,dx + Q\,dy$, γ övre halvan av ellipsen $4x^2+y^2=4$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$

Integranden blir betydligt enklare på "enhetscirkelbiten"



Green: $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} \end{aligned}\right\} \text{lika!} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

Vi kan byta väg

speciellt vektorfält !!!

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \quad t: 0 \to \pi \right] = \int_0^{\pi} \frac{-\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \boxed{\pi}$$

Vi verkar kunna "byta väg".

Gäller alltid då vi har situationen

i $\boxed{\text{Def. 9.1}}$ Potentialfält

$$F = \text{Grad } U \quad \text{dvs} \quad (P, Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ kallas exakt

$\boxed{\text{Sats 9.4}}$

$$(P, Q) \text{ potentialfält} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Bevis: $(P, Q) = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vi misstänker att en kurvintegral oberoende av vägval om potential finns.

Potentialen ger t.o.M. en "primitiv funktion"

$\boxed{\text{Sats 9.3}}$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1, x_2) - U(x_0, y_0)$$

Resultatet beror bara på start- och slutpunkt.

Bevis: $\gamma = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t: \alpha \to \beta$

$$\frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{(kedjeregeln)}$$

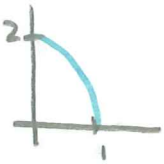
$$= P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} U(x(t), y(t))\,dt = \Big[U(x(t), y(t)) \Big]_\alpha^\beta$$

$$= U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) \quad \square$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ $\quad (P, Q) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$



γ: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ i första kvadranten från $(1,0)$ och $(0,2)$

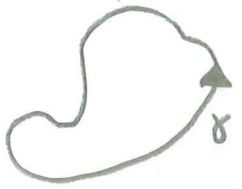
Vi har potential $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ så länge $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(0,2) - U(1,0) = \ln 2$$

Observation

Speciellt $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$ om potential finns

och γ sluten:



startpunkt = slutpunkten

$\boxed{\text{Ex.}}$

$$(P,Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad \gamma \text{ enhetscirkeln } (+)\text{led}$$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}(\cos t)\,dt \quad \left| \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \right. \quad t: 0 \to 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\,dt = 2\pi \boxed{\neq 0} \quad ö$$

Slutsats: Potential kan inte finnas

men? $u(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$?

Får ej skära y-axeln $x \neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\frac{y^2}{x}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Fungerar ej för förra kurvan

Potential U finns $\Rightarrow \int_\gamma = U(\text{stut}) - U(\text{start})$

oberoende av vägval

$\Downarrow$

Sluten kurva ger 0.

$\Downarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$(P,Q) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$ Potential $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

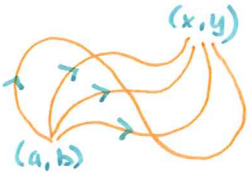
$(P,Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \int_{\text{enhets cirkeln}} = 2\pi \neq 0 \Rightarrow$ potential finnes ej

Omvänt: om fältet vägoberoende så finns potential

$\boxed{\text{Sats 9.5}}$

Vägoberoende vektorfält $\Rightarrow$ potentialfält

$U(x,y) = \int_\gamma P(s,t)\,ds + Q(s,t)\,dt$, där



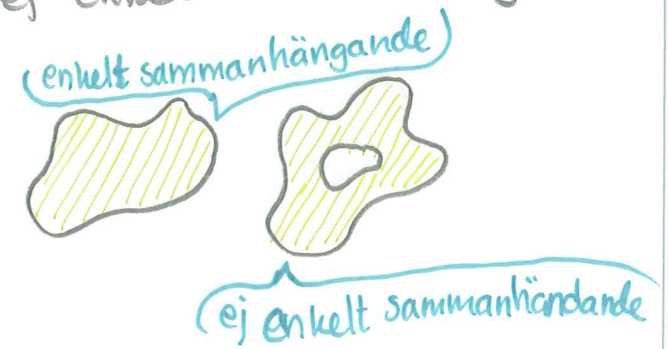
γ går från fixa (a,b) till variabla (x,y)

Jämför analysens huvudsats: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Vi har sett att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ej garanterar potential

I exemplen var området ej enkelt sammanhängande

((P,Q) ej def i $(x,y) = (0,0)$

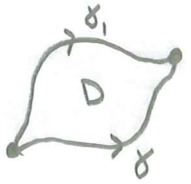


Om området enkelt sammanhängande och $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ finns enligt

$\boxed{\text{Sats 9.6}}$ ett potentialfält!

Beviset för ovan använder $\boxed{\text{Sats 9.5}}$

: Integralen blir oberoende av vägen eftersom green gäller.



$$\int_\gamma - \int_{\gamma_1} = \iint_D \overbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}^{0} \, dx\,dy = 0$$

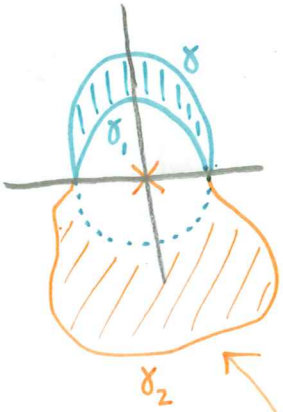
$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{\gamma_1}$$

$$(P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Funkade att byta ut γ mot γ_1

Men ej mot γ_2

Felet $= 2\pi$



beräknad och ger 2π...

Därför ger även 2π

Pga Green

Sammanfattning:

① $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ oberoende av väg

② Finns potential till (P, Q)

③ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

"Ja jävlar vad den mäter kurvintergaler"

Pilar i ryggen och magen

se anmärkning 9.3 & 9.4

Om allt vänds 90°

: Flödesintegral

$$(P, Q) = \int_\gamma -Q\,dx + P\,dy$$