Gränsvärden

Hur beter sig $f(x)$ då $x \to \infty$?

$$f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \text{ då } x \to \infty$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\ln x}{x}} \longrightarrow ?$$

Ex. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Är $f(x)$ godtyckligt nära 1 bara x är tillräckligt stort?

$\varepsilon = 0{,}01$ När är $|f(x) - 1| < 0{,}01$?

Alltså när är $0{,}99 < f(x) < 1{,}01$?

Vi kommer att lösa $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < 0{,}01$

dvs. $\frac{1}{|x+1|} < 0{,}01$

Och $|x+1| > 100$ då $x > 99$ (el. $x < -101$)

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet!

Då är $|f(x) - 1| < \varepsilon$ för alla $x > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1}_{W_\varepsilon}$

Ty $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow x + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \varepsilon$

$|f(x) - 1| = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{x+1}$ då $x = 0$

Slutsats: $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$

$\cos x$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$

x^2

e^x $\quad e^x \longrightarrow \infty$ då $x \longrightarrow \infty$

Sats 9.1 (Kolla upp!)

ex. $\frac{x}{x+1} + \arctan x \longrightarrow 1 + \frac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$ ——

$e^x - \frac{1}{x+1} + x^2 \longrightarrow \infty$ ——

$\arctan(e^x) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ ——

Beräkna $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$

$\infty - \infty$ = går ej bb

$$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} \longrightarrow \frac{3}{2} \text{ då } x \to \infty$$

Gränsvärde

Varje växande funktion som är uppåt begränsad har ett gränsvärde då $x \to \infty$

$f(x) = 2\arctan x$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pi$

Vi defn. ensidigt gränsvärde med att byta ut villkoret:

$0 < |x-a| < \delta$

mot $a < x < a+\delta$ eller $a-\delta < x < a$

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ högergränsv

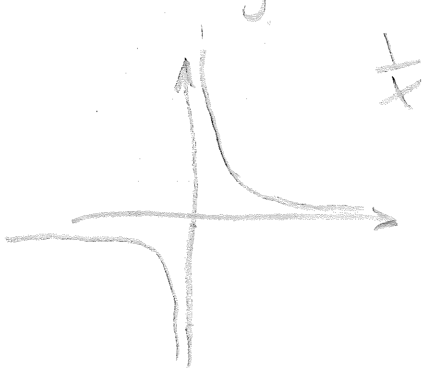
$\lim_{x \to a^-} f(x)$ vänstergränsv

Det gäller att

$\lim_{x \to a} f(x)$ existerar

$\Updownarrow$

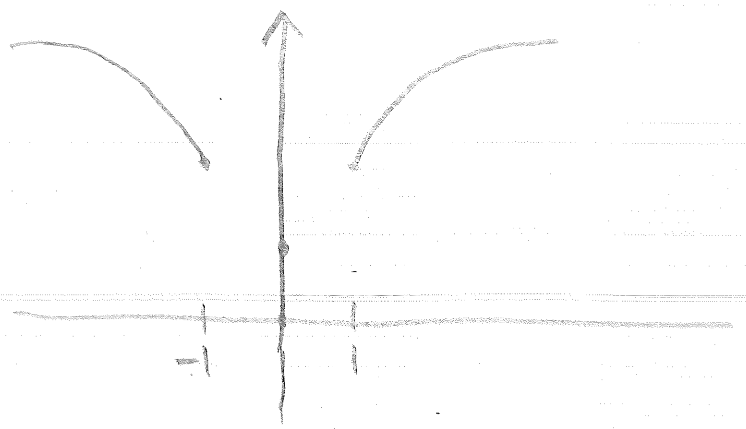
$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim_{x \to a^-} f(x) \end{array}\right\}$ existerar och är lika



Betrakta funktionen $f(x) = 1 + \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$

1) Bestäm $D_f =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$

2) Är f kontinuerlig på D_f?

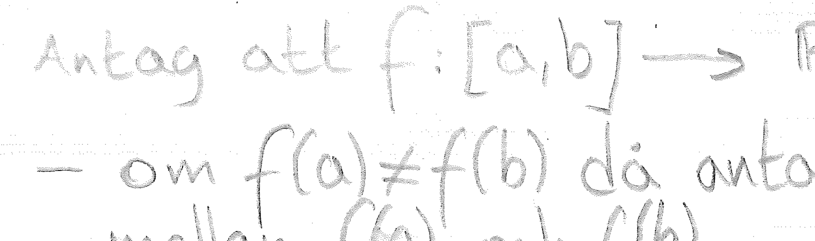


Sats

Antag att $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ är kont.

- om $f(a) \neq f(b)$ då antar f varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$
- f antar ett största värde och ett minsta värde
- värdemängden för f är intervallet $[m, M]$ (min, Max)

Ex. på icke-kont. funkt.



$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

$f(x)$ saknar gränsv. då $x \to a$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(c)$

f är kont. i $x = c$