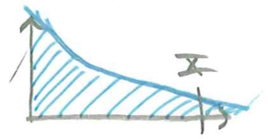
Generaliserade Intergaler

ENDIM: 

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^{X} f(x)\,dx$$

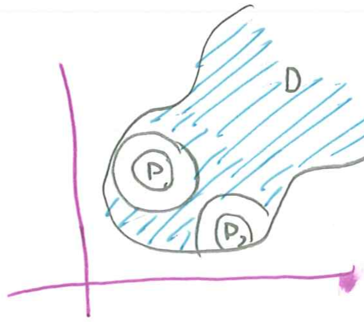
Om D eller $f(x,y)$ obegränsad, blir $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ generaliserad

Definieras på följande sätt:

Antag D oberänsad och f obegränsad nära P_1 och P_2

Bilda svit $D_1, D_2, D_3 \dots$ sådana att

- alla D_k begränsad
- f begränsad i alla D_k
- $D_k \to D$ då $k \to \infty$,
  dvs sviten växer ut mot D



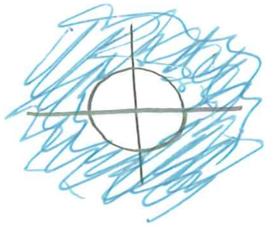
Def. $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy = I$$

$\boxed{\text{Konvergent}}$ om gränsvärdet existerar ändligt med värdet I, annars $\boxed{\text{divergent}}$.

ANMÄRKNING

Om $f(x,y) \geq 0$ kan vi räkna "som vanligt", annars kan konstiga saker hända

Ex. $I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, $\quad D: x^2+y^2 \geq 1$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow E: \begin{cases} 1 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iint_D \frac{1}{(r^2)^2}\cdot r\,drd\varphi = \iint_E \frac{1}{r^3}\,dr\,d\varphi =$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^3}\,dr \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{r^3}\,dr \cdot \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{-2\cdot r^2}\right]_1^R = 2\pi \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2R^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi$$

Ex. Finns ingen elementär primitiv till e^{-x^2}, men vi kan beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = I$

$$I^2 = I\cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

"som vanligt baklänges"

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy = J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

Tänk!

Polära kordinater: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \mathbb{R}^2$ blir $E: \begin{cases} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I^2 = J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_E e^{-r^2}\cdot r\,drd\varphi$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr \int_0^{\pi} 1\,d\varphi = 2\pi \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^R = 2\pi \lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-R^2}}{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right) = \pi \quad \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$