

Konvergens i  $H$ :  $u_n \rightarrow u$  då  $n \rightarrow \infty$ , vilket betyder  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$

Exempel:  $L^2[0,1]$ ,  $\|u_n - u\| = (\int_0^1 (u_n(x) - u(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$

Följande gäller inte:  $u_n \rightarrow u \Rightarrow u_n(x) \rightarrow u(x)$  för något  $x$ .  
 $u_n(x) \rightarrow u(x) \Rightarrow u_n \rightarrow u$

} Denna handlar om konvergens.

Bas:  $q_n$  följd av ortogonala element i  $H$ .  $q_n$  kallas bas om varje  $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_n, u)}{\|q_n\|^2} q_n$ , och betyder att  $\|u - \sum_{n=1}^N q_n\| \rightarrow 0$  då  $N \rightarrow \infty$ .

Parsevals formel:  $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_n, u)^2}{\|q_n\|^2}$ ,  $(u|v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_n, u)}{\|q_n\|^2} (q_n, v)$

Skillnaden på  $H$ -rum och Pre- $H$ -rum: Om  $u \in H$  så gäller  $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_n$ ,  $c_n = \frac{(q_n, u)}{\|q_n\|^2}$ . Använder vi Parsevals:  
 $\sum |c_n|^2 \|q_n\|^2 = \|u\|^2 < \infty$ .

Hilbertrum: Om  $\sum |c_n|^2 \|q_n\|^2 < \infty \Rightarrow \sum c_n q_n \in H$ .

## Operatorer på Hilbertrum

En linjär avbildning  $A: H \rightarrow H$  kallas för en operator. Linjär:  $A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av$ .

En operator kallas begränsad om det finns  $C \in \mathbb{R}$  så att  $\|Au\| \leq C \|u\|$  för alla  $u$ . Begränsade operatorer är snälla att arbeta med, men man har inte mycket nyttja av dem.

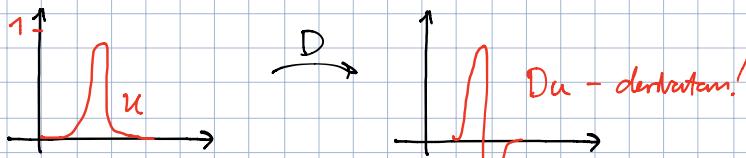
En operator är begränsad  $\Rightarrow$  Den är kontinuell:  $u_n \rightarrow u \Rightarrow Au_n \rightarrow Au$ .

### Exempel (Begränsad operator)

Vi är i  $L^2(0,1)$ : Vi definierar:  $(Au)(x) = \int_0^1 K(x,y) u(y) dy$ , där  $K(x,y)$  uppfyller  $\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy < \infty$  Begränsad integraloperator!

### Exempel (Differentialoperator)

$D: u \mapsto u'$  är en sl. differentielloperator. Vi har att  $D: C^1(I) \rightarrow C^0(I)$ .  $C^0(I)$  är tät i  $L^2(0,1)$ .  $D$  är definierad endast på en tät delmängd till  $L^2(0,1)$ , men kallas ändå för en operator.  $D$  är inte begränsad.



(Involutioner)

### Matriser

$A$  är en  $n \times n$ -matris.

•  $u$  är egenvektor med egenvärde  $\lambda$ .  $Au = \lambda u$

• Om det finns en bas av egenvektorer så kan  $A$  diagonaliseras. Då kan varje  $\bar{u}$  skrivas  $\bar{u} = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ ,  $u_k = \frac{(\bar{u}, e_k)}{\|e_k\|^2}$ , och  $A\bar{u} = \sum_{k=1}^n A(u_k e_k) = \sum_{k=1}^n u_k \lambda_k e_k$ .

•  $A$  är symmetrisk om  $A = A^T$ . Om  $A \in \mathbb{R}$  och  $A = A^T$ , så finns en orthonormerad bas av egenvektorer, där  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ .

•  $A$  är positivt semidefinit om  $(Au, u) \geq 0$  för alla  $u$ . Positivt definit om  $(Au, u) > 0$ , för alla  $u \neq 0$ .

• Om  $A\bar{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k e_k$ ,  $e_k$  CW-bas, så kan vi skriva  $A\bar{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_{[e_k]} \bar{u}$ ,  $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_{[e_k]}$ .

• Motstående gäller för Hermitetiska matriser  $A = A^H = A^T$ .

Vi observerar att  $A = A^H \Leftrightarrow (\bar{u}, A\bar{v}) = (A\bar{u}, \bar{v}) \forall \bar{u}, \bar{v}$ . Deltat ty  $(\bar{u}, A\bar{v}) = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n] \begin{bmatrix} A \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = [A^H \bar{u}]^H \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}$ ,  $\bar{u}^H A = (A^H \bar{u})^H$

Operatorer på Hilbertrum:

- Vi säger m att  $A$  är symmetrisk om  $(Au, v) = (u, Av) \forall u, v$ .
- Vi säger att  $A$  är en egenvärde med egenvärde  $\lambda$  om  $A\bar{u} = \lambda \bar{u}$ .
- Pos. (semi)definit dekomponeras som vanligt.

symmetrioperator

Sats: Låt  $A: D_A \rightarrow H$ , vara en symmetrisk operator

- 1) Alla egenvärden  $\in \mathbb{R}$
- 2) egenvektorma är ortogonala
- 3) Om  $A$  är pos. (semi)definit så är  $\lambda_k > 0$  ( $\lambda_k \geq 0$ )

Exempel (symmetrisk differentialeoperator):

$L_2(0, \pi)$ ,  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $D_A = \{u \in C^2(0, \pi), u(0) = u(\pi) = 0\}$ ,  $D_A$  tätt i  $L_2(0, \pi)$ .

Följande gäller:  $A$  är symmetrisk, pos semidef.,  $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$  utgör en bas av ortogonala egenfunktioner

$$\text{Bevis: } A \text{ symmetrisk: } (Au, v) = (u, Av) = (u, -v'') = \int_0^\pi (\bar{u}(x) (-v''(x))) dx = \underbrace{\int_0^\pi \bar{u}(x) (-v'(x)) dx}_{=0} + \int_0^\pi \bar{u}(x) v(x) dx = (Au, v) \#$$

Sats H.14:

$A$  symmetrisk med egenvärde och egenfunktioner  $\varphi_k$ ,  $\lambda_k \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_k$  utgör en ortogonal bas och  $A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\varphi_k} \varphi$

(OBS Rayleighkvillor)

Sturm-Liouvilleoperator:

$I = [x_0, x_1]$ ,  $p \in C^1(I)$ ,  $p(x) > 0 \forall x$

$q \in C^0(I)$ ,  $q(x) \geq 0$

$w \in C^1(I)$ ,  $w(x) > 0$

$\alpha_0, \beta_0 \geq 0$  inte båda 0

$\alpha_1, \beta_1 \geq 0$  inte båda 0

En operator på formen  $Au = -\frac{1}{w(x)} \left( -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) \right)$  med  $D_A = \{u \in C^2(I) : \begin{cases} \alpha_0 u(x_0) - \beta_0 u'(x_0) = 0 \\ \alpha_1 u(x_1) - \beta_1 u'(x_1) = 0 \end{cases}\}$

kallas en regulär Sturm-Liouvilleoperator på  $L_2(I, w)$ ,  $A$  är symmetrisk!

Sats:

Om  $A$  är en regulär SL-operator så är  $A$  symmetrisk och pos. semidefinit. (på  $L_2(I, w)$ )