"Glöm vektorer: inför en bra bas och räkna med koordinater istället. Detta ger matrisekvationer."

## Linjära rum:

$C([0,1])$, $C^2([0,1])$ är exempel på linjära rum.

$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

$\|\bar{u}\| = \sqrt{(u|u)} = \sqrt{u_1^2+u_2^2} = |u|$

I linjära rum kan man införa bra baser och skriva funktioner som koordinater

Ibland har vi en skalärprodukt $(f|g)$, som definieras efter tre räknelagar

Ibland har vi normen $\|f\|$, som mäter storlekan på en funktion. $\|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}}$ (2-norm)

↳ normen är $\|f\| = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)| = \|f\|_\infty$

Linjära rum med skalärprodukt = pre-Hilbertrum.

"skalärproduktens främsta syfte är att avgöra om saker är vinkelräta"

I linjära rum kan vi välja ON-baser! Varför vill man göra det? → Det blir lättare att räkna ut koefficienterna (koordinaterna) till funktioner. Vi gör detta med projektionssatsen: $x_k = \frac{(f|e_k)}{(e_k|e_k)}$, där $\bar{f} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots$

Har man en godtychlig bas så kan vi alltid räta upp denna till en ON-bas med Gram-Schmidts metod.

Detta är dock väldigt räkneintensivt och systematiskt. → Finns förvalda ortogonalpolynom ofta!

## Exempel:

$\cos kx$, $\sin kx$ blir en normerad bas på $L_2([0,\pi])$ (alla integrerbara). Detta betyder att en funktion $f$ kan skrivas

$f = \sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx$.

Skalärprodukten är då $(f|g) = \int_0^\pi \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ ($L_2$). Vi kan nu räkna ut fourierkoefficienterna genom $\boxed{a_k = \frac{(f|e_k)}{(e_k|e_k)}}$

$L_2$ betyder $\{f$ funktioner på $[0,\pi] \to \mathbb{R};\ \|f\|_{L_2} < \infty\}$. Alltså att skal. prod. $\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\pi |f(x)|^2 dx}$ existerar.

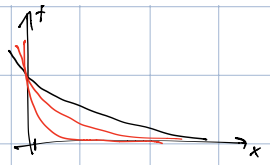
Norm mäter storlek och avstånd. Avstånd mellan $f$ och $g$ ges av $\|f-g\|$

## Exempel

$\Omega = (0,1)$, $u_k(x) = e^{-kx}$ $\quad u(x) = 0 \quad 0 < x < 1$

$\|u_k - u\|_\infty = \sup_{0<x<1} |e^{-kx} - 0| = \sup_{0<x<1} e^{-kx} = 1$ för alla $k>0$. $1 \not\to 0$

↑ Konvergensen hullas för likformig.




Men i $L_2$-norm: $\|u_k - u\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |u_k(x) - u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (e^{-kx})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2k}(1-e^{-2k})\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ då $k \to \infty$ i $L_2$

Observera skillnaden mellan $\|f\|_{L_2}$ och $\|f\|_\infty = \sup_x |f|$! Läs om detta!

$\|f\|_n = \sqrt[n]{f_1^n + f_2^n + \dots}$. I $\|f\|_\infty$ kommer den av $f_1, f_2 \dots$ som är störst att dominera helt.

Om $e_k = \varphi_k$ är ON-bas i $H$: $f = \sum c_k \varphi_k$ menar $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n$ (delsumma). $\|S_N - S\| \to 0$, $S = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$

i $H$ (pre-Hilbertrum är skalärprod. def. så normen är en $L_2$-norm!

Ett fullständigt pre-Hilbertrum är ett Hilbertrum. Dvs alla följder som ser ut att konvergera konvergerar.

T.ex. så är $\mathbb{R}$ inte fullständigt medan $\mathbb{R}$ är fullständigt.

- $C([0,1])$ med $L_2$-norm är inte fullständigt
- $L_2([0,1])$-1———— är fullständigt.
- $C([0,1])$ med $\infty$-norm är fullständigt

Sats: Parsevals formel

$$\|f\|^2 = \sum \left| \frac{(e_k | f)}{\|e_k\|^2} \right|^2$$

$$(f | g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k | f)(g | e_k)}{\|e_k\|^2}$$

Detta är Pythagoras sats generaliserad.