"Alla potentialfält är virvelfria"

VIRVELFRIA FÄLT

Definition: $\vec{A}$ är virvelfritt i Ω om $\text{rot}\,\vec{A} = 0$

$\boxed{\Omega \text{ enkelt sammanhängande}}$ – exempel på sådana områden är $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. kan alltid krängas

$\mathbb{R}^3 \setminus$ z-axeln är INTE det.

Sats: Varje potentialfält är virvelfritt $\Longrightarrow$ $\vec{u} = \text{grad}\,u$, $\text{rot}\,\vec{u} = \text{rot}(\text{grad}\,u) = 0$.!

$\overset{?}{\Longleftarrow}$

! Omvändningen inte alltid sann! Motexempel: $\vec{B} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2+y^2} \longrightarrow \int_{\gamma_R} \vec{B}\,d\vec{r} = 2\pi$

Vi har här singularitet i hela z-axeln, dvs $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ z-axeln. Ej enkelt sammanhängande !

KÄLLFRIA FÄLT:

Definition: Vektorfältet $\vec{B}$ är källfritt eller solenoidalt om $\text{div}\,\vec{B} = 0$ $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, där $\vec{A}$ är $\boxed{\text{vektorpotentialen}}$ Analogt med innan!

Krökliniga koordinatsystem

$\boxed{\text{Universalt tips: undersök ALLTID symmetri}}$

- Byte av $\begin{cases} \text{koordinater} \\ \text{basvektorer} \end{cases}$

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x,y,z) \\ u_2 &= f_2(x,y,z) \\ u_3 &= f_3(x,y,z) \end{aligned} \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 &= g_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 &= g_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

Om f_i eller g_i inte är linjärt, kallas koordinatsystemet för krökliniigt

Koordinatlinjer: t.ex. s,t fix $\longrightarrow$ u koordinatlinje

Koordinatplan: t.ex. s fix $\longrightarrow$ t,u koordinatplan

Parametrisering

Definition: Ett krökliniigt system kallas ortogonalt om koordinatlinjerna i varje punkt skär varandra i rät vinkel!

Tangentvektorn till u_i-koordinatlinjen

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_i' &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_i} \\ \hat{e}_i &= \frac{\vec{r}_i'}{|\vec{r}_i'|} \end{aligned}\right\} \quad \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \quad h_i = |\vec{r}_i'| \text{ kallas skalfaktorn}$$

Cylinderkoordinater: $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ $\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$ $\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$

$h_\rho = 1$ $\quad h_\varphi = \rho$ $\quad h_z = 1$

Ortogonala!

Dessa bådadar är ortogonala

Sfäriska koordinater: $\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

$\longrightarrow$ samma metod!

Ortsvektordifferentialen: $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$, $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot du_1 + \dots$ osv, $\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \longrightarrow \boxed{d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + \dots}$

Integration i krokliniga koord: Tex. flödesintegral där $u_1 = 2 \longrightarrow$ yta genom (u_2, u_3): $\hat{n}\, dS = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\, du_2 du_3 = \pm\, h_2 \hat{e}_2 \times h_3 \hat{e}_3 \cdot du_2 du_3$

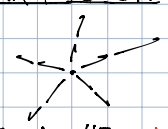
$\nabla \phi = G_1 \hat{e}_1 + G_2 \hat{e}_2 + G_3 \hat{e}_3$

$\partial \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \dots + = (\nabla \phi) d\vec{r} = G_1 h_1 du_1 + G_2 h_2 du_2 + G_3 h_3 du_3$, $(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1) = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3$, $G_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \phi = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \hat{e}_i}$$

VIKTIGA VEKTORFÄLT, δ-FUNKTIONEN

$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2} \longrightarrow div(\vec{v}) = 0$. Korrekt?



Gauss sats ger då: $\oint_{\partial k} \vec{v} \hat{N} dS = \int \frac{1}{R^2} \hat{r} \cdot \hat{r} (R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi) = 4\pi$ — Vad är problemet? $\longrightarrow$ Singularitet!

Hur modellerar vi singulariteten?

$$\frac{\hat{e}_r}{r^2} \longrightarrow \frac{r \hat{e}_r}{r^3 + \varepsilon^3}. \quad \lim_{\varepsilon \to 0} div \frac{r \hat{e}_r}{r^3 + \varepsilon^3} = \dots = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3\varepsilon^2}{(r^3 + \varepsilon^3)^2} = f(r)$$

$$\int d^3 r\, f(r) = \dots = 4\pi$$

$$\int div\left(\frac{r \hat{e}_r}{r^3 + \varepsilon^3}\right) d^3 r = 4\pi$$ (uppfylld om vi behandlar singularitetens rätt) $\vec{\nabla} \frac{\hat{e}_r}{r^2} = 4\pi \delta^3(\vec{r})$