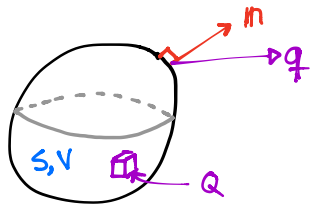
Föreläsning 7

Transient värmeledning

Global balansform

$$\int_V Q\,dV - \int_S q_n\,dS = \int_V \rho c \dot{T}\,dV$$



$$\boxed{q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n}}$$

Vi vill ha stark form

$$\int_S q_n\,dS = \int_S \mathbf{q}^T\mathbf{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{q})\,dV$$

$$\int_V [\rho c \dot{T} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) - Q]\,dV = 0$$

Stark form

$$\boxed{\rho c \dot{T} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) - Q = 0}$$

Nu vill vi ta fram den svaga formen

$$\int_V v\rho c \dot{T}\,dV + \int_V v \operatorname{div}(\mathbf{q})\,dV - \int_V v Q\,dV$$

Green-Gauss sats ger oss:

$$\int_V v \operatorname{div}(\mathbf{q})\,dV = \int_S v\,\mathbf{q}^T\mathbf{n}\,dS - \int_V (\nabla v)^T \mathbf{q}\,dV$$

Insättning ger

Svag form

$$\boxed{\int_V v\rho c \dot{T}\,dV + \int_S v q_n\,dS - \int_V (\nabla v)^T \mathbf{q}\,dV - \int_V v Q\,dV = 0}$$

Sätt $c=0$ för att få det stationära fallet (ingen upplagring, som i boken)

FE-formulering

$$T = \mathbb{N}\mathbf{a} = \mathbb{N}(x,y,z)\,\mathbf{a}(t)$$

$$\dot{T} = \mathbb{N}\dot{\mathbf{a}}$$

$$v = \mathbb{N}\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbb{N}^T$$

$$\nabla T = \mathbb{B}\mathbf{a}, \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} (N_1)'_x & (N_2)'_x & \cdots & (N_n)'_x \\ (N_1)'_y & \cdots & \ddots & \vdots \\ (N_1)'_z & \cdots & & (N_n)'_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla v = \mathbb{B}\mathbf{c}$$

$$(\nabla v)^T = \mathbf{c}^T\mathbb{B}^T$$

Insättning ger:

$$\mathbf{c}^T\left[\int_V \mathbb{N}^T\rho c \dot{T}\,dV + \int_S \mathbb{N}^T q_n\,dS - \int_V \mathbb{B}^T\mathbf{q}\,dV - \int_V \mathbb{N}^T Q\,dV\right] = 0$$

Insättning av $\mathbf{q} = -\mathbb{D}\nabla T$ samt $\dot{T}$ ger:

$$\underbrace{\int_V \mathbb{N}^T\rho c \mathbb{N}\,dV}_{\mathbb{C}}\,\dot{\mathbf{a}} + \underbrace{\int_V \mathbb{B}^T\mathbb{D}\mathbb{B}\,dV}_{\mathbb{K}}\,\mathbf{a} = \underbrace{-\int_S \mathbb{N}^T q_n\,dS}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_V \mathbb{N}^T Q\,dV}_{\mathbf{f}_\ell} \Leftrightarrow \boxed{\mathbb{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbb{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_\ell}$$

+RV
+Initialvärden

Metod för tidsintegration

Den eklaste approximation för $\dot{a}$ som vi kan komma på är:

$$\boxed{\dot{a} = \frac{a(t_{n+1}) - a(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \equiv \frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t}}$$

Använd generaliserad trapetsmetod

$$\begin{aligned} a &= \theta a_{n+1} + (1-\theta) a_n \\ f &= \theta f_{n+1} + (1-\theta) f_n \end{aligned} \quad , \quad \theta \in [0,1]$$

Om vi sätter in detta får vi en metod som vi kan stega oss fram med.

$$\boxed{\mathbb{C}\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} + \mathbb{K}(\theta a_{n+1} + (1+\theta) a_n) = \theta f_{n+1} + (1-\theta) f_n}$$

θ kan väljas med olika metoder.

Olika val för θ:

$\underline{\theta = 0}$: $\mathbb{C}\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} + \mathbb{K} a_n = f_n$

$\underline{\theta = 1/2}$: Crank Nicholson

$\underline{\theta = 1}$: $\mathbb{C}\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} + \mathbb{K} a_{n+1} = f_{n+1}$ ⚠ ANVÄND $\theta = 1$ I PROJEKTET!

$$\boxed{(\mathbb{C} + \Delta t \mathbb{K}) a_{n+1} = \mathbb{C} a_n + \Delta t f_{n+1}}$$ Implementera detta!

Till labben

- Skapa nät av koordinater, Edof, ndof, nelm, bc
- Initiera K=zeros(ndof), F=zeros(ndof, 1)
- for (i=1 to nelm)

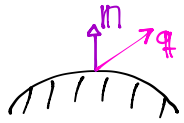
  [Ke,fe]=Ke=flw2te(Ex(i,:), ep, D)

  triangular, element, tjocklek

  [K,F]=assem(Edof(i,:),K,Ke,F,fe)

  end
- Randtest f_b
- a=solveq(K, F+f_b, bc)
- Flux q flw2ts
- ed=extract(Edof, a)
- fill(ed, koordinater)

Konvektion



$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = \alpha (T - T_\infty)$$

$$f_b = -\int_S N^T q_n \, dS = -\int_S N^T \alpha (T - T_\infty) \, dS = \underbrace{-\int_S N^T \alpha N \, dS}_{K_c} \, a + \int_S N^T \alpha T_\infty \, dS$$

$$K a = f_b + f_\ell \quad \text{Insatt: } (K + K_c) a = \int_S N^T \alpha T_\infty \, dS + f_\ell$$

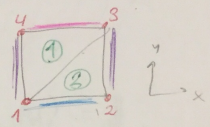
Exempel extenta

Lös problemet $\operatorname{div}(\nabla u) = 0$ i en fyrhörning region med noder i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ (1, 2, 3, 4)

Randvillkor: $u'_x = 0$ då $x=0$ och $x=1$

$u'_y + u = 2$ då $y=1$

$u = 1$ då $y=0$



Svag form

$$-\int_A v \operatorname{div}(\nabla u) \, dA = \int_A (\nabla v)^T \nabla u \, dA - \int_L v (\nabla u \cdot n) \, dL = 0$$

$\nabla u = 2 - u$ längs L_{3-4}

$$\begin{cases} u = N a & \nabla u = B a \\ v = N c & \nabla v = B c \end{cases}$$

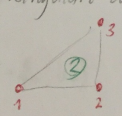
Denna tar vi nästa gång

FE-form

$$\left(\int_A B^T B \, dA + \int_{L_{3-4}} N^T N \, dL \right) a = -\int_{L_{1-2}} N^T u'_y \, dL + \int_{L_{3-4}} 2 N^T \, dL$$

Använd 3-nod triangulärt element för att räkna variation längs $y=1$

Element 2



$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \bar{N} \alpha$$

Denna kommer från: ?

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = C \alpha$$

$$T = \bar{N} \alpha = \bar{N} C^{-1} a^e = N^e a^e, \quad \text{där } N^e = [1-x, \; x-y, \; y]$$

Tänk efter för att ta fram!

$$\nabla T = B^e a^e = \nabla N C^{-1} a^e = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^e} C^{-1} a^e$$