Exempel inhomogen PDE:

$$\begin{cases} \text{PDE} & u_t' - u_{xx}'' = t \\ \text{RV} & u(0,t)=1,\ u(\pi,t)=3 \\ \text{BV} & u(x,0)=g(x) \end{cases}$$

ignorar t här

Sök enkel $u_s(x)$: $\begin{cases} -u_{s,xx}''=0 \\ u_s(0)=1 \quad u_s(\pi)=3 \end{cases}$

$\Downarrow$

$u_s(x) = Ax + B$

RV ger A och B $\longrightarrow$ $u_s(x) = \frac{2}{\pi}x + 1$

Inför nu $u = u_s + v$ och sätt in i PDE:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & t = u_t' - u_{xx}'' = [\text{sätt in}] = v_t' - v_{xx}'' \\ \text{RV:} & v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ \text{BV:} & v(x,0) = g(x) - \frac{2}{\pi}x - 1 \end{cases}$$

Vi har nu ett nytt problem med homogena RV!

Lösning på vanligt sätt genom ansättning av sinusserie.

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(kx)$$

PDE $\Downarrow$

$$\sum (v_k' + k^2 v_k)\sin(kx) = t \longleftarrow \text{utvecklas i serie!} \longrightarrow t = t\sum^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Vi ser genom detta att

$v_k' + k^2 v_k = t \cdot b_k \longrightarrow$ Integrerande faktor $e^{k^2 t}$ ger $v_k(t) = \frac{b_k}{k^2}\left(t - \frac{1}{k^2}\right) + c_k e^{-k^2 t}$

där $\begin{cases} b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^k}{k}\right) \\ c_k \text{ är okänd men fås ur BV!} \end{cases}$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{b_k}{k^2}\left(t - \frac{1}{k^2}\right) + c_k e^{-k^2 t}\right)}_{d_k} \sin(kx)$$

BV: $v(x,0) = g(x) - \frac{2}{\pi}x - 1 = \sum d_k \sin(kx) \Longrightarrow d_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(g(x) - \frac{2}{\pi}x - 1\right)dx \longleftarrow$ Denna löser BV!

Linjära rum

Vi behöver mer kunskap för att lösa PDE i annan form än sinusserier

Ett linjärt rum är:

- Ex vektorer i $\mathbb{R}^3$

- Ex: $C(\Omega) = \{\text{alla kont fkn } f:\Omega \to \mathbb{R}\}$

  $F(\Omega) = \{\text{alla fkn } f:\Omega \to \mathbb{R}\}$

  $C(\Omega) \subset F(\Omega)$

Lemma: H linjärt rum, $U \subset H$. Två vektorer u, v uppfyller alltid

$$\left.\begin{array}{l} u, v \in U \Rightarrow u+v \in U \\ u \in U,\ \lambda \text{ skalär} \Longrightarrow \lambda u \in U \end{array}\right\} U \text{ linjärt rum!}$$

Exempel: $P(\Omega) = \{\text{Polynom på } \Omega\}$ Ett rum som består av alla polynom på Ω

$P(\Omega) \subset \underset{\text{linjärt rum}}{F(\Omega)} \Rightarrow p_1 + p_2 \in P(\Omega)$ och $\lambda p_3 \in P(\Omega)$

Exempel $R(\Omega) = \{\text{alla polynom av grad} = 2\}$

$p_1 + p_2 = x^2 + (-x^2 + 3x) = 3x \notin R(\Omega)$ $R(\Omega)$ har inte ett linjärt rum!

Snabbrepetition av begrepp från Lin-Alg.

U är ett linjärt rum över $\mathbb{R}$

$u_1, u_2, u_3 \in U$

* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ kallas linjärkombination av u_1, u_2, u_3
* $[u_1, u_2, u_3]$ kallas linjärn höljet av u_1, u_2, u_3 och är mängden av alla linjärkombinationer av u_1, u_2, u_3.
* man säger att u_1, u_2 och u_3 spänner upp $[u_1, u_2, u_3]$, V, om alla v kan skrivas som linjärkombination av alla u.
* $u_1, \dots, u_n$ är linjärt oberoende om $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Annars linjärt beroende
* Om $u_1, \dots, u_n$ spänner upp V och är linjärt oberoende så kallas det för en bas för V.

Exempel $P_2 = \{\text{Polynom av grad} \leq 2\}$

$p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 \cdot 1 \quad a_1 \cdot x \quad a_2 x^2$, $\quad 1, x, x^2$ spänner upp P_2 och är linjärt oberoende

$\Rightarrow$ Är en bas för P_2

$\boxed{\dim P_2 = 3}$

Även $1, (x-1), (x-1)^2$ är en bas!

Är basen ortonormerad? Hur avgör man det i P_2:s fall?

Skalärprodukt

Vi generaliserar begreppet: $u, v \in U$, $(u|v) \in \mathbb{R}$ $\left[u \cdot v = (u|v) = (u,v) = \langle u|v \rangle = \langle u,v \rangle \right]$ finns många sätt att skriva

skalärprod. $(\in \mathbb{C})$

måste uppfylla: $u \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 u \cdot v_1 + \lambda_2 u \cdot v_2$

$u \cdot v = v \cdot u = \overline{v \cdot u}$ om $u, v \in \mathbb{C}$

$u \cdot u \geq 0$, ≥ 0 om $\in \mathbb{C}$ också!

$u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Exempel: $(\bar{x}|\bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ i $\mathbb{R}^3$

$(\bar{z}|\bar{w}) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + z_3 \overline{w}$ i $\mathbb{C}^3$ Glöm inte konjugatet i den komplexa definitionen av skalärprodukt!

$(i,0,0) \cdot (i,0,0) = i \cdot \bar{i} = 1$

Exempel: På $C(\Omega)$ o P_2

$(f|g) = \int_{\Omega} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$ blir skalärprodukt

$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(-x)\, dx$ blir det inte (ty integralen < 0)

Skalärprodukt ger sätt $\begin{cases} \text{att } \underbrace{\text{mäta storlek}}. \text{ Kallas } \underline{\text{norm}}: \|u\| = \sqrt{(u|u)} \\ \text{att avgöra ortogonalitet: } u \perp v \text{ om } (u|v) = 0 \end{cases}$