Metoden för lösning av homogena Dirichletvillkor som vi gjorde förra föreläsningen (där lösningen var en sinusserie) ska vi nu modifiera:

Exempel Värmeledning med Neumannvillkor:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & \partial_t u - a\partial_x^2 u = 0 \\ \text{RV:} & \partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0 \\ \text{BV:} & u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Vi ansätter nu att lösningen är en cosinusserie:

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{uppfyller randvärdena!}$$

Sätts denna in i PDE får vi ur fourierseriens entydighet:

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u = \sum\left(\partial_t u_k + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 u_k\right)\cos\frac{k\pi x}{L} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_t u_k + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 u_k = 0$$

$$\Downarrow$$

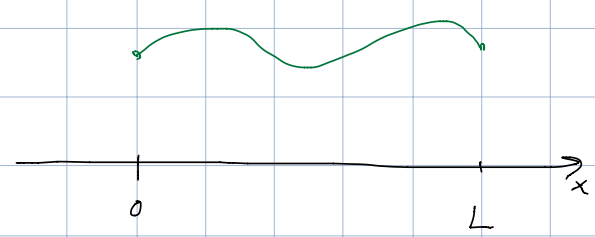
$$u_k(t) = a_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

och $\boxed{u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$ Löser PDE + RV!

Se därefter om $u(x,0) = g(x)$, där $a_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$

Metoden fungerar på vågekvationen med:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & \partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0 \\ \text{RV:} & u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ \text{BV:} & u(x,0) = g(x)\ ,\ u_t'(x,0) = h(x) \end{cases}$$



Vi ansätter även nu en sinusserie (Dirichletvillkor):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{klarar RV}$$

Insättning i PDE och entydighet ger:

$$u_k''(t) + c^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 u_k = 0$$

Karakteristisk ekvation blir

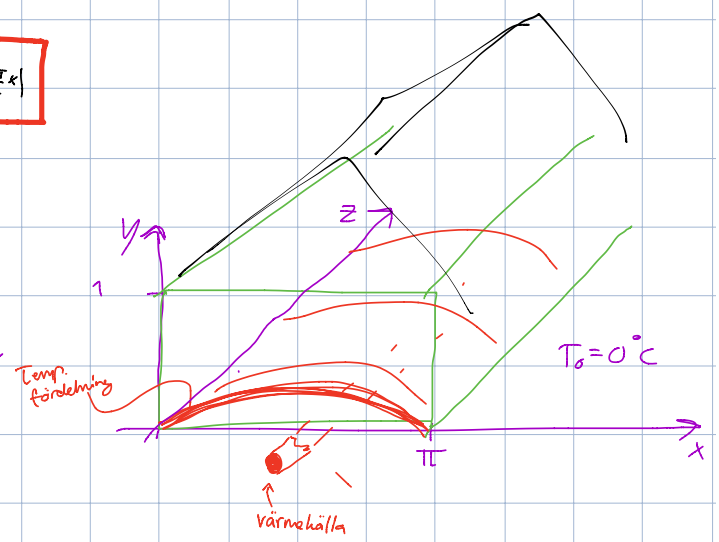
$$r^2 + \left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 = 0 \implies r = \pm i\frac{ck\pi}{L}$$

$$u_k(t) = a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)$$

Vi får slutligen

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$$

där BV ger a_k och b_k



Exempel Oisolerad lång byggnad:

Temperaturen i golvet varierar med $\sin x$

sök stationär temperatur i byggnaden!

Modell: $\partial_t u - \Delta u = 0$, stationär: $\partial_t u = 0 \Rightarrow$ Laplace $\Delta u = 0$

$$\begin{cases} \text{PDE: } \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ RV_x\text{: } u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ RV_y\text{: } u(x,0) = \sin x \quad u(x,1) = 0 \end{cases}$$

har fyra randvillkor, där tre av dem är 0 (utetemperatur)

Ansätter lösning på formen $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin(kx)$

Sätt in i PDE och lös ut DE:

$$\partial_y^2 u_k(y) - k^2 u_k(y) = 0 \xrightarrow{\text{karak. ekv.}} u_k(y) = c_k e^{ky} + d_k e^{-ky}$$

Vi kan dock göra på annat sätt: hyperbolisk lösning

$$u_k(y) = A_k \cosh(ky) + B_k \sinh(ky)$$

Denna form liknar den tidigare och är snäll att lösa!

Lösningen får formen

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cosh(ky) + B_k \sinh(ky)\right)\sin(kx)}$$

RV_y: $u(x,0) = \sum A_k \sin(kx) = \sin x \implies A_1 = 1,\ A_2 = A_3 = \dots A_n = 0$

$$u(x,1) = \sum \left(A_k \cosh(k) + B_k \sinh(k)\right) \sin kx = 0 \Rightarrow A_k \cosh(k) + B_k \sinh(k) = 0$$

$$= B_k \underbrace{\sinh(k)}_{\neq 0} \quad [\text{då } k \geq 2] \Longrightarrow B_k = 0$$

$=0$

fallet $k=1$: $\cosh(1) + B_1 \sinh(1) = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{\cosh(1)}{\sinh(1)}$

Den färdiga lösningen blir då

$$\boxed{u(x,y) = \left(\cosh(y) - \frac{\cosh(1)}{\sinh(1)} \sinh(y)\right) \sin(x)}$$

Se ex s. 82 för graf

Inhomogena Dirichletvillkor ← (löses med knep!)

Värmeledning igen:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & \partial_t u - \partial_x^2 u = f(x,t) \\ \text{RV:} & u(0,t) = A \quad u(\pi,t) = B \\ \text{BV} & u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Om f bara beror på x, t.ex $f(x) = 6x$, $A=1$, $B=2$:

stationär lösning: Ordinär DE + RV, BV ger då

$$u_{stat}(x) = -x^3 + \frac{1+\pi^3}{\pi} x + 1$$

Vad ska vi ha denna till? Vi skriver:

$u = u_{stat} + v$, v: ny okänd funktion, $v = u - u_{stat}$

$$\begin{cases} \text{PDE:} & \partial_t v - \partial_x^2 v = [\text{sätt in}] = 6x - 6x = 0 \\ \text{RV:} & v(0,t) = 0 = v(\pi,t) \\ \text{BV:} & v(x,0) = g(x) - u_{stat}(x) \end{cases}$$

Aha, v är snäll!

→ Lös v lite tidigare!