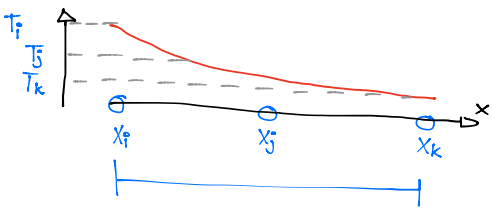
Föreläsning 5

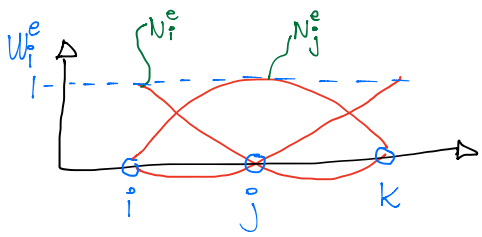


Ansats: $T=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\boxed{\bar{N}\alpha}$

$$T_i=\alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 x_i^2$$
$$T_j=\alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 x_j^2$$
$$T_k=\alpha_1+\alpha_2 x_k+\alpha_3 x_k^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}T_i\\ T_j\\ T_k\end{bmatrix}}_{a^e}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & x_i & x_i^2\\ 1 & x_j & x_j^2\\ 1 & x_k & x_k^2\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}}_{\alpha}$$

$$T=\bar{N}\alpha=\underbrace{\bar{N}\bar{C}}_{N^e}a^e$$



2D-fallet

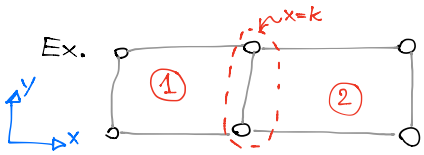
Har man förstått 1D-fallet (Nej) så är det inte så svårt att förstå 3D.

Krav

Completeness:

Kompatibilitet: Vi tillåter inte "hopp" (interna sprickor).

Ex.



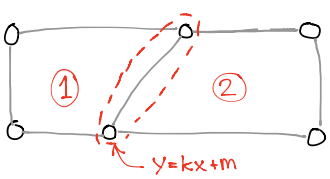
Ansats

$$\boxed{\begin{aligned}T_1&=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy\\ T_2&=\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y+\beta_4 xy\end{aligned}}$$

$$T_1=\alpha_1+\alpha_2 k+\alpha_3 y+\alpha_4 ky=\alpha_1'+\alpha_2' y$$
$$T_2=\beta_1+\beta_2 k+\beta_3 y+\beta_4 ky=\beta_1'+\beta_2' y$$

T_1 & T_2 är linjära (2 noder) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Kompatibelt!}}$

Ex.



$$T_1=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy$$
$$T_1=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3(kx+m)+\alpha_4 x(kx+m)=\boxed{\alpha_1'+\alpha_2' x+\alpha_3' x^2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ej kompatibelt!}}$

Feluppskattning

Antag att vi känner till den korrekta lösningen T.

Taylorutv. kring (x_0, y_0): $T = T_0 + T'_x(x-x_0) + T'_y(y-y_0) + T''_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(T''_{xx}(x-x_0)^2 + T''_{yy}(y-y_0)^2\right) + hot =$

$$= \underbrace{a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2}_{T^{app}} + hot$$

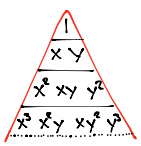
Felet: $|T - T^{app}| = O(h^3)$

Förbättra ansatsen: $T^{app} = a_1 + \ldots + a_6 y^2 + \overbrace{a_7 x^3 + a_8 y^3}^{\text{Parasittermer}}$ (undvik om möjligt)

Fortsätt Taylorutv. av T: $T = a_1 + \ldots + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 y^3 + a_9 x^2 y + a_{10} x y^2 + O(h^4)$

Felet: $|T - T^{app}| = |a_9 x^2 y + a_{10} x y^2 + O(h^4)| = O(h^3)$

Pascals triangel

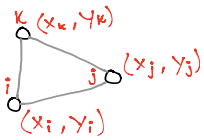


$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \underbrace{\alpha_4 xy}_{\text{parasitterm}}$

FYLLER DU ETT HELT VÅNINGSPLAN SÅ FINNS INGA PARASITTERMER!

Trenodselement

"Sjukt enkelt att sätta upp en mesh med sånna här"

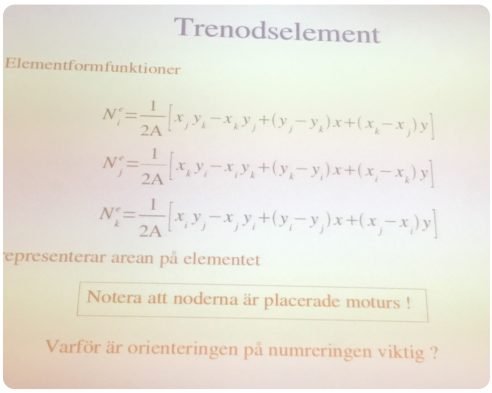


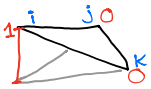
$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$, Inga parasittermer!

Komp. ok!

$$\begin{cases} T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ T_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Rightarrow a^e = \mathbb{C}\alpha \Rightarrow T = \mathbb{N}\alpha =$$

$$= \mathbb{N}\mathbb{C}^{-1} a^e = \boxed{\mathbb{N}^e a^e}$$





Vi har lyft upp en nod för att få fram formfunktionen till i. Gör motsvarande för k och j.

Kap 8 - Ej FEM

Viktade residualmetoder

$$\begin{cases} LU(x)+g(x)=0 \quad , \quad a \leq x \leq b \\ U(x=a)=U_a \\ U(x=b)=U_b \end{cases}$$

(L är en differentialoperator)

Multiplicera med godtycklig viktfunktion och integrera över kroppen.

$$\int_a^b v\left(LU(x)+g(x)\right)dx=0 \qquad (*)$$

Antag en approximativ lösning:

$$U^{app}=\psi_1(x)a_1+\psi_2(x)a_2+\ldots+\psi_n(x)a_n$$

Skriv på matrisform:

$$U^{app}=\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2 & \ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{bmatrix}=\Psi(x)\,a$$

Insättning i (*) ger:

$$\int_a^b v\left[L(\Psi a)+g\right]dx=0 \qquad (**)$$

Antag att L är linjär och dela upp:

$$L(\Psi a)=L(\psi_1 a_1)+\ldots+L(\psi_n a_n)=L(\psi_1)a_1+\ldots+L(\psi_n)a_n=\begin{bmatrix}L(\psi_1) & L(\psi_2) & \ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\end{bmatrix}$$

Välj den godtyckliga viktfunktionen

$$V(x)=V_1(x)c_1+V_2(x)c_2+\ldots+V_n(x)c_n=\begin{bmatrix}V_1 & V_2 & \ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\end{bmatrix}=\mathbb{V}\mathbb{C}=\mathbb{C}^T\mathbb{V}^T$$

Insättning i (**)

$$\mathbb{C}^T\int_a^b \mathbb{V}^T\left(L(U^{app})+g\right)dx=0 \Rightarrow \mathbb{C}^T \text{ godt} \Rightarrow \int_a^b \mathbb{V}^T\left(L(U^{app})+g\right)dx=0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \mathbb{V}^T L(\Psi)\,dx\;a=-\int_a^b \mathbb{V}^T g\,dx$$

Nu är vi klara! Med vad?