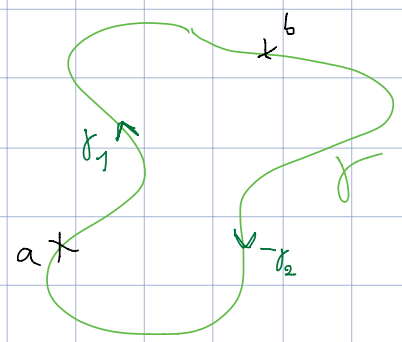
Potentialfält:

$\vec{F}(P,Q)$ i öppen mängd Ω

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = [\text{Delar upp } \gamma] = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, om

$\int_{\gamma_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}\, d\vec{r}$!

$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = U(\bar{b}) - U(\bar{a}) = 0$ för $\bar{a} = \bar{b}$ (sluten kurva i pot. fält)



Definition

Vektorfältet kallas potentialfält/konservativt fält i Ω om det finns en C^1-fkn U i Ω så att $\vec{F} = \text{grad}(U)$. U kallas potential till $\vec{F}$.

Differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ är "exakt" i Ω om det finns en fkn $U \in C^1$ i Ω $dU = P\,dx + Q\,dy$:

$\frac{\partial U}{\partial x} = P$ $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\vec{F} = (P,Q) = \text{grad}(U)$. Kom ihåg att $\nabla U = \nabla(U + \text{konstant})$!

Nu ska vi gå igenom lite trista satsen!

SATS:

Låt $\vec{F} = (P,Q)$ vara potentialfält med potentialen U i Ω. För varje kurva γ i Ω, $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(\bar{b}) - U(\bar{a})$,

Speciellt är kurvintegralen $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ vägoberoende

Bevis: $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}(\vec{r}(t))\,\vec{r}'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}(t))\,dt = U(\vec{r}(\beta)) - U(\vec{r}(\alpha)) = U(\bar{b}) - U(\bar{a})$

Exempel

Lång, rak tråd. $\vec{E} \propto \frac{(x,y)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq 0$. $\vec{E} = \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$\Rightarrow U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C \Rightarrow \vec{E}$ är konservativt!

Exempel

Magnetfält $\vec{B} \propto \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$. $\int_{\sigma_R} \vec{B}\, d\vec{r} = \dots = 2\pi$

Ej ett potentialfält (ty singularitet i $(0,0)$) $\Longrightarrow$ Saknar potential!

SATS:

Låt $\vec{F}(P,Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält i bågvis sammanhängande mängd.

Om $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ är vägoberoende, så har $\vec{F}$ potential i Ω.

Låt $\vec{F} = (P,Q)$ vara pot. fält i Ω. Finns U så att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Longrightarrow \partial Q = \partial P$

SATS

Fältet $\vec{F}$ har potential $U \in C^2$ i Ω. Då är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall x,y \in \Omega$. Detta är nödvändigt för att F ska vara ett potentialfält!

SATS:

Om $\vec{F}$ uppfyller att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ och om Ω är en enkelt sammanhängande öppen del av planet, så har $\vec{F}$ potential i U.

GREENS FORMEL

Orienterar randen så att området ligger till vänstor av kurvan – positiv orientering.

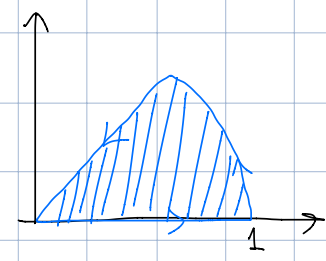
Om kompakta delområdet D av Ω har rand ∂D och är pos. orienterad:

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

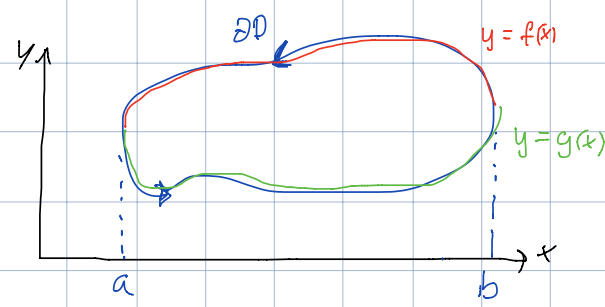
Exempel:

Kurvintegralen $\int_\gamma -y^3dx + x^3dy$ längs γ, $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le y \le x$

Greens formel ger $I = \iint_D (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$



Bevis till Greens formel



Vi delar upp randenitvå funktioner f och g.

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \underbrace{\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy}$$

$$= \int\left(\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)dx = \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{g(x)}^{f(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,f(x)) - P(x,g(x))\,dx$$

Vi jämför nu med linjeintegralen av fältet $(P,0)$ längs ∂D.

$$\begin{cases} \partial D_1 = \vec{r}(x) = (x, g(x)) & x: a \to b \\ \partial D_2 = \vec{r}(x) = (x, f(x)) & x: b \to a \end{cases}$$

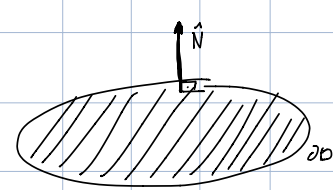
$$\int_{\partial D} P\,dx = \oint_{\partial D} (P,0)\,d\vec{r} = \int_{\partial D_1} (P,0)\,d\vec{r} + \int_{\partial D_2} (P,0)\,d\vec{r} = \int_a^b (P,0)(1,g'(x))\,dx + \int_b^a \underbrace{(P,0)}_{\text{ger inget bidrag!}}(1,f'(x))\,dx = \int_a^b \big(P(x,g(x)) - P(x,f(x))\big)\,dx$$

Vi har nu visat Greens formel för $Q=0$!

Tvådimensionellt flöde:

$$\int_{\partial D} \vec{u}\cdot\hat{N}\,ds = \int_{\partial D} -u_2\,dx + u_1\,dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)}_{=\operatorname{div} u} dx\,dy$$

$$\begin{cases} \hat{N}\,ds = (dy, -dx) \\ \vec{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \end{cases}$$



Tredimensionellt flöde: Gauss sats

Låt $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält i Ω! Om komp $K \subset \Omega$ har rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor, med utåt riktad normal, så gäller:

$$\iint_{\partial K} \vec{u}\cdot\hat{N}\,ds = \iiint_K \operatorname{div}\vec{u}\,dx\,dy\,dz$$