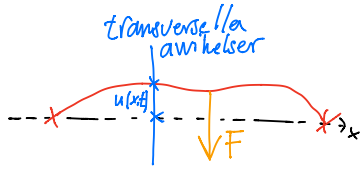
Svängande sträng

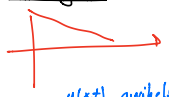


Vågekvationen

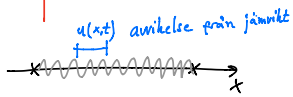
$$\boxed{u_t'' - c^2 u_x'' = \frac{f}{\rho_\ell}}$$

ρ_ℓ: längddensitet, F: yttre kraft, c: vågutbredningshastighet, $c = \sqrt{\frac{S}{\rho_\ell}}$, S: spännkraft

Ofta $f=0$, vilket ger homogen ekvation: $u_t'' - c u_x'' = 0$, lösningen till denna är $\phi(x-ct) + \psi(x+ct)$



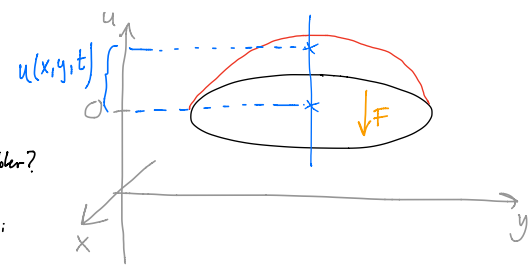
Longitudinella svängningar



Samma ekvation: $\boxed{\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = \frac{f}{\rho}}$

Vågekvationen är en enkel PDE som endast har en rumsvariabel, till skillnad från membran

Svängande membran (t.ex. trumskinn)



Hur ställer vi upp en PDE för membran av 3 variabler?

$\Rightarrow$ Kraftekvationen, vi struntar i härledning:

$$\boxed{\partial_t^2 u - c^2 \overbrace{\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right)}^{\Delta u} = \frac{F}{\rho_y}}, \quad c^2 = \frac{S}{\rho_y}, \quad \rho_y = \text{ytdensitet}$$

Vi inför operatorn $\Delta = \partial_x^2$ i 1D och $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ i 2D. Detta ger en allmän vågekvation:

$$\boxed{\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = \frac{f}{\rho}}$$

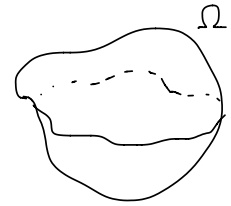
Denna ser likadan ut oavsätt dimension, bara att Δ och skiljer sig

Konserveringsmodeller

Substans av något i område Ω (ämne, värme)

Kvantitetsökning i Ω = flödet in i Ω + produktion/nedbrytning i Ω

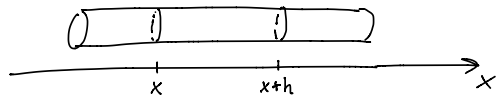
(som värmen från en ugn) (som värmen skapad av mikrovågsugn)



Exempel: 1 rumdimension

Långt smalt rör med tvärsnitt A

I röret diffunderar en gas.



→ $q(x,t)$: densitet av gas

→ $j(x,t)$: flöde mängd som passerar x per tidsenhet: "Strömtäthet"

→ $k(x,t)$: mängd som skapas

Massan i röret kan beskrivas enligt $m = \int_x^{x+h} q(y,t) A\, dy$

Flödet beskrivs då som $\frac{d}{dt} m = \partial_t \int_x^{x+h} q(y,t) A\, dy$

$$\partial_t \int_x^{x+h} q(y,t) A\, dy = j(x,t)\cdot A - j(x+h,t)\cdot A + \int_x^{x+h} k(y,t) A\, dy$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \partial_t q(y,t)\, dy + \frac{j(x+h,t) - j(x,t)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} k(y,t)\, dy$$

låt $h \to 0$

$$\partial_t q(x,t) + \partial_x j(x,t) = k(x,t)$$

$$\boxed{\partial_t q + \partial_x j = k}$$ Kontinuitetsekvationen

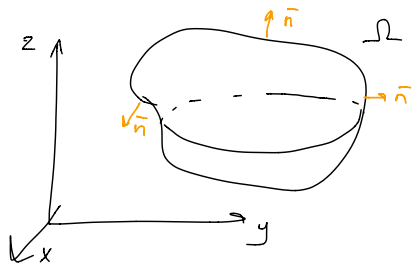
Samma sak i 3 dim:

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{r} = (x, y, z)$

$q(\bar{r},t)$ densitet

$k(\bar{r},t)$ produktion

$\bar{j}(\bar{r},t)$ flöde



Integrerar över randen till Ω

$$\partial_t \iiint_\Omega q(\bar{r},t)\, dV = \iiint_\Omega k(\bar{r},t)\, dV + \iint_{\partial\Omega} \bar{j}(\bar{r},t)\, \bar{n}\, dS$$

$$\iiint_\Omega \left(\partial_t q + \operatorname{div} j - k\right) dV = 0$$

[Gauss-Green: $\iiint_\Omega \operatorname{div} j\, dV$, $\operatorname{div} j = \nabla j = \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z$]

$$\Downarrow \quad \boxed{\partial_t q + \operatorname{div} \bar{j} = k}$$

Diffusion: $\boxed{\bar{j} = -D \operatorname{grad} q} = -D(\partial_x q, \partial_y q, \partial_z q)$

$$\partial_t q - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} q) = k$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\partial_t q - D\Delta q = k}$$

Om D – diffusionskonstanten – är konstant.

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} q) = \nabla q$

Diffusionsekvationen/Värmeledningsekvationen

Efter lång tid har förändringen av substans stabiliserats: $\partial_t q = 0$

$\Rightarrow$ $-D\Delta q = k$ stationärt tillstånd

Om $k=0 \Longrightarrow \boxed{\Delta q = 0}$ Laplace ekvation

Vi har nu härlett tre ekvationer som denna kurs ska fokusera närmare på:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 \\ \partial_t u - D\Delta u = 0 \\ -\Delta u = 0 \end{cases}$$

Det som skiljer dessa åt är ordningen av tidsderivatan

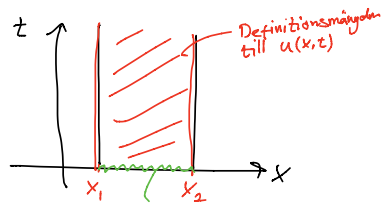
Randvärden

Vi kan t.ex sätta för $u(x,t)$ villkoret att

$u(x_1,t) = u(x_2,t) = 0$

eller

$\partial_x u(x,t) = \partial_x(x_2,t) = 0$ (flödet är noll: isolerad kant)



Startvärden

$u(x,0) = u_0(x)$

$\partial_t u(x,0) = v_0(x)$